F 1812

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

TOMUL XVIII (XXII)

Fasc. 1–2

SECŢIA IV **MECANICĂ TEHNICĂ**

1972

1973 APR 2 0

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

TOMUL XVIII (XXII)

Fasc. 1–2

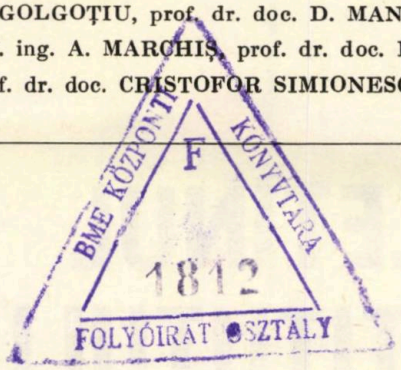
SECŢIA IV MECANICĂ TEHNICĂ

1972

1989

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. em. dr. doc. GH. ALEXA, prof. em. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CALISTRU,
prof. ing. T. GOLGOȚIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar),
conf. ing. A. MARCHIȘ, prof. dr. doc. D. RUSU,
acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (președinte)



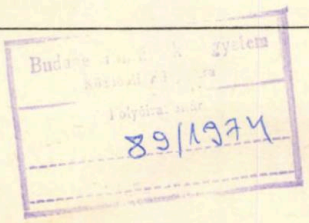
COMITETUL DE REDACȚIE AL SECȚIEI

IV. MECANICĂ TEHNICĂ

Prof. dr. doc. T. FĂRCAȘ
Conf. ing. CR. LINDE
Prof. ing. G. d'ALBON

REDACȚIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)
Conf. dr. ing. ALFRED BRAIER (secretar)
Ing. ANETA BRAIER (redactor)



BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2 1972

Secţia IV

MECANICĂ TEHNICĂ

SUMAR

Pag.

D. MANGERON, M. N. OĞUZTÖRELI (Canada) şi FLORIN V. POTERAŞU, Probleme de control nesingulare. (I) Condiţii suficiente pentru non-negativitatea variaţiei a doua (engl., rez. rom.) 1

N. IRIMICIUC, ELISABETA RUSU şi I. IBĂNESCU, Asupra legăturilor neolonome impuse sistemelor mecanice avînd solide rigide ca elemente constitutive. (II) Legături neolonome realizate prin reazeme cu rostogolire fără alunecare (franc., rez. rom.) 7

SPIRIDON DELEANU, N. IRIMICIUC şi AURORA CRĂCIUNAŞ, Asupra noţiunii de „punct material" în dinamica solidului cu masă variabilă (franc., rez. rom.) 19

I. SIMIONESCU, CEZAR DUCA, OCTAV MUNTEANU şi CORNELIU DRĂGAN, Traductor mecanoelectric triortogonal pentru studiul cinematic al mecanismelor spaţiale (rom., rez. franc.) 23

VICTOR BAUŞIC, D.HORBANIUC, IULIAN MIROŞ, COSTACHI GIRIADĂ, VALERIAN PALIHOVICI şi DOREL LEON, Repartiţia eforturilor unitare tangenţiale în secţiunile tarozilor solicitaţi la răsucire, obţinută cu ajutorul unei reţele analogice (germ., rez. rom.) 27

N. G. POPINCEANU şi E. N. DIACONESCU, Contribuţii la calculul îmbinărilor cu şuruburi cu strîngere iniţială pe bază de cercetări teoretice şi experimentale. (II) Încercări experimentale şi metodă de calcul (franc., rez. rom.) 31

L. T. HOSTIUC, Contribuţii privind durabilitatea şi capacitatea dinamică de bază a rulmenţilor radiali cu mişcare de oscilaţie. (II) Relaţie de calcul a capacităţii dinamice de bază pentru cazul particular $\theta < \theta_{crt}$ (franc., rez. rom.) 41

C. CIOBANU, LEONID CIOCAN şi M. RĂDULESCU, Asupra mişcării fluidelor vîscoase incompresibile prin interstiţii inelare cu pereţi în mişcare relativă alternativă de translaţie (franc., rez. rom.) . . . 49

Pp.

I. CURIEVICI, DAVID PERETZ, MAIER PERLMAN și AKIBA SEGAL, Considerații cu privire la insuficiența conceptului clasic de diametru echivalent în calculele de trecere a căldurii la conducte eliptice (rom., rez. germ.) 59

GÉRARD d'ALBON, VALERIU CERNESCU, EMIL JUGUREANU, MAIER PERLMAN și D. COSTIN, Studii asupra radiatoarelor cu lichid intermediar cu elemenți din material plastic (rom., rez. franc.) 65

EMIL JUGUREANU, Determinarea coeficientului α real în convecția cu aer, ținînd seama de efectul Jacq (franc., rez. rom.) 71

MAIER PERLMAN, Asupra unei noi concepții de modelare a procesului de trecere a căldurii la suprafețe cu rugozități artificiale și microaripioare (rom., rez. franc.) 77

GH. LOZONSCHI, Analiza tipurilor de baterii termoelectrice ce pot fi utilizate ca treaptă înaintașă de energie pentru îmbunătățirea randamentului centralelor (rom., rez. franc.) 83

DAN URSESCU și VICTOR ZUBCU, Entalpmetru pentru abur umed de joasă presiune (engl., rez. rom.) 89

D. PERETZ, Efectul variației raportului de compresie asupra arderii detonante în motoarele cu aprindere prin scînteie (rom., rez. germ.) . . 95

EMIL GAIGINSCHI, MARCEL GUTMAN și M. POPESCU, Proprietățile comune ale centrelor termodinamice aparținînd ciclurilor teoretice fundamentale și relația de legătură între parametrii acestor centre (franc., rez. rom.) 101

TOMA FĂRCAȘ, C. PICOȘ, GH. ILIESCU, BOGDAN GHEORGHIU și VLADIMIR BURGARD, Contribuții la studiul schimbărilor introduse prin revenire, în comportarea magnetică a unor oțeluri de îmbunătățire (germ., rez. rom.) 107

C. PICOȘ, CAZIMIR BOHOSIEVICI, OCTAVIAN PRUTEANU și V. BRAHA, Studiul variației microdurității stratului superficial durificat prin rulare cu bile, în raport cu temperatura de încălzire (germ., rez. rom.) 113

PETRE TUDORAN, Cercetări privind influența alierii cu azot și aluminiu asupra durității oțelului 35 M 16 (germ., rez. rom.) 123

GH. CAȘLER, MIRCEA COZMÎNCĂ și GH. LUNGU, Contribuții la dinamica frezării frontale, cu capete de frezat, a unor oțeluri aliate utilizate în construcția de mașini (rom., rez. franc.) 133

DAN NICOLESCU, Determinarea parametrilor momentului de torsiune la tarodarea oțelurilor românești (rom., rez. franc.) 143

AUREL RĂILEANU, EMIL UNCHEȘEL și N. GOJINEȚCHI, Determinarea parametrilor forței principale de așchiere în procesul de strunjire longitudinală a oțelurilor românești, grupa oțel pentru cuțite, STAS nr. 1699–50 (rom., rez. franc.) 149

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D C. 621 – 50

NON-SINGULAR CONTROL PROBLEMS
I. SUFFICIENT CONDITIONS FOR NON-NEGATIVITY OF THE SECOND VARIATION

BY

D. MANGERON, M. N. OĞUZTÖRELI, and FLORIN V. POTERAŞU

To MAURO PICONE in the Jubilee Year of his Treatise on Mathematical Analysis

1. Introduction

In one of our previous papers we have presented and theoretically developed the integral equation function-space method, proceeding from the form given by G. J. Lastman in 1970 [1]. The advantage of using this method and the method of *differential dynamic programming* under the form put forth in 1968 by D. H. Jacobson [2] consists in the fact that instead of the cost function (which implies high storage of data when the dynamic programming is used [3]), we use the variation of a non-optimal such function (up to second order terms inclusively), due to the small variations of the state variable around a nominal trajectory. This variation of the cost function is specified with the aid of small number of parameters, fact which contributes to the avoiding of some of the storage difficulties. The knowledge of the variation of the cost function permits the calculation of an improved trajectory. D. H. Jacobson has proved that the method of differential dynamic programming is a better tool than the methods of second variation put forth by S. K. Mitter [4] and S. R. McReynolds, A. E. Bryson [5]. G. J. Lastman [1] asserts that the method of differential dynamic programming is included in the integral equation function-space method, but does not give any justification for this assertion. Similar assertions have been made by L. S. Lasdon, S. K. Mitter, A. D. Warren [6] in the presentation of the method of the conjugated gradient and by L. S. Lasdon, A. D. Warren, S. K. Rice [7] in the presentation of the method of the deviation of the penalty factor in the conjugate gradient method.

This paper presents a series of sufficient conditions for the non-negativity of the second variation in problems of non-singular control having inequalities as constraints. Such conditions have not yet been given in the pertinent literature and become increasingly necessary as various inequality restrictions containing control unavoidably appear in the problems of optimum design in the mechanics of deformable bodies. In this manner

the purpose of our paper is better put into evidence since such sufficient conditions are obviously to be included in the second variation methods mentioned above.

Likewise, we give here the manner of determining the optimum shape of a linear element under the form of a straight bar subjected to restrictions of stresses and inertia moment. For determining the optimum shape we apply the integral equation function-space method. This method, which so far has never been applied to the solution of optimal problems in the mechanics of deformable bodies is used in the following considerations in a unified manner both for statically determined systems and for statically undetermined systems and, in addition both for static and dynamic loads.

In another Note the authors give the integral equation function-space method applied to the solution of optimization problems in the mechanics of deformable bodies as well as examples of the application of the methods indicated above to the determination of the optimum shape of systems of bars, thin shells of revolution rotationally-symmetrically loaded and in further Notes other applications of interest will be dealt with.

2. Sufficient conditions for the non-negativity of the second variation in non-singular control problems having inequalities as constraints

The restrictions considered are algebraic inequalities containing control.

Let us consider here the following non-linear optimal control problem. It is requested to minimize the functional

$$V(X_0, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} Q[X(t),\ U(t),\ t]\, dt + G[X(t_f),\ t_f], \tag{2.1}$$

subjected to the restrictive conditions

$$\dot{X} = F[X(t),\ U(t),\ t], \qquad X(t_0) = X_0, \tag{2.2}$$

and

$$C[X(t),\ U(t),\ t] \leqslant 0. \tag{2.3}$$

It is assumed that no restriction is imposed on the terminal state $X(t_f)$. We underline that $X(t)$ is an n-vector of the state variables, $U(t)$ is an m-vector of the control variables, $0 < m \leqslant n$; C is a q-vector of the inequality restriction functions which satisfy the conditions (i) $\left(\dfrac{\partial C}{\partial U} \not\equiv 0\right)$, and (ii) the matrix $(\partial C^{\alpha}/\partial U^{k})$ is of rank s if $C^{\alpha} = 0$, $\alpha = i_1, \ldots, i_s$.

Other notations. By $(.)^T$ we have denoted the transposed matrix of the matrix $(.)$, the letters M, X, U, P when used as subscripts indicate the partial derivation with respect to the variable subscript. If $M(t) = M^1(t), \ldots, M(t)^T$, then by $M_d(t)$ we denote the diagonal matrix $q \times q$ whose element (i, i) is $M^i(t)$. By δX we have denoted the variation of X. Likewise, we introduce the weak variables $Z^i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant q$ which transform the inequality restrictions (2.3) into equality restrictions

$$C^i[X(t), U(t), t] + \frac{1}{2}[Z^i(t)]^2 = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant q,$$

or in matrix notations

$$C[X(t), U(t), t] + \frac{1}{2} Z_d(t) Z(t) = 0. \tag{2.4}$$

In this case the second variation is given by

$$\begin{aligned} \delta^2 V = \int_{t_0}^{t_f} \Big\{ & \frac{1}{2} \delta X^T H_{XX} \delta X + \delta U^T H_{UX} \delta X + \frac{1}{2} \delta U^T H_{UU} \delta U + \\ & + \delta M^T H_{UM} \delta U + \delta X^T H_{XM} \delta M + \frac{1}{2} \delta Z^T M_d \delta Z + \delta M^T Z_d \delta Z \Big\} dt + \\ & + \frac{1}{2} \delta X^T G_{XX} \delta X \Big|_{t_f}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

subjected to the conditions

$$\delta \dot{X} = F_X \delta X + F_U \delta U, \quad \delta X(t_0) = 0, \tag{2.6}$$

and

$$C_X \delta X + C_U \delta U = 0 \tag{2.7}$$

and the Hamiltonean is of the form

$$\begin{aligned} H = & Q[X(t), U(t), t] + P^T(t) F[X(t), U(t), t] + \\ & + M^T(t) C[X(t), U(t), t]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Adding to (2.5) the relations (2.6) and (2.7) through the medium of Lagrange's multipliers, time functions, we obtain

$$\delta^2 V = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2} \delta X^T H_{XX} \delta X + \delta U^T H_{UX} \delta X + \frac{1}{2} \delta U^T H_{UU} \delta U + \right.$$

$$+ \delta M^T H_{UM} \delta U + \delta X^T H_{XM} \delta M + \frac{1}{2} \delta Z^T M_a \delta Z + \delta M^T Z_a \delta Z + \tag{2.9}$$

$$\left. + \delta P^T (H_{PX} \delta X + H_{PU} \delta U - \delta \dot{X}) - \delta M^T (C_X \delta X + C_U \delta U) \right\} dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \delta X^T G_{XX} \delta X \Big|_{t_f}.$$

It is worth mentioning now that the function-space methods, in which the differential dynamic programming method is included, have the aim of completing the optimization techniques. As shown by J. W e s c o t t in the paper [8], presented at the IFAC Congress in Warsaw in 1969, from the function-space methods the most important is the differential programming method. This method is a combined method for solving optimal control problems. Thus, for local variables it is an integrated method, based on dynamic programming (applied, however, to an eventually non-optimum trajectory), while for global variables it is a method of successive approximation. As it may be observed, it presents some advantages as compared to the dynamic programming method under the form given by R. B e l l m a n and to the variational calculus in the sense that it may be easily adapted for computers and it implies a smaller number of equations.

In the frame of the differential dynamic programming we consider the following relation

$$\delta P = \frac{1}{2} R(t) \delta X, \tag{2.10}$$

whose role is to ensure the obtaining of quadratic terms in the expression of the second variation. The second variation becomes

$$\delta^2 V = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2} \delta X^T (\dot{R}(t) + H_{XX} + H_{PX}^T R + R H_{XP}) \delta X + \delta U^T (H_{UX} + \right.$$

$$+ H_{PU}^T R) \delta X + \delta M^T (H_{UM} - C_U) \delta U + \delta X^T (H_{XM} - C_X) \delta M + \tag{2.11}$$

$$\left. + \frac{1}{2} \delta U^T H_{UU} \delta U + \frac{1}{2} \delta Z^T M_a \delta Z \right\} dt + \frac{1}{2} \delta X^T (G_{XX} - R) \delta X \Big|_{t_f}.$$

Obviously, $\delta^2 V \geqslant 0$ if we choose $R(t)$ such that to satisfy the series of restrictions (equalities and inequalities)

$$H_{UX} + H_{PU}^{T} R = 0, \tag{2.12}$$

$$\dot{R}(t) + H_{XX} + H_{PX}^{T} R + R H_{XP} = N(t) \geqslant 0, \tag{2.13}$$

$$H_{UM} - C_U = 0, \tag{2.14}$$

$$H_{XM} - C_X = 0, \tag{2.15}$$

$$H_{UU} \geqslant 0, \tag{2.16}$$

$$M_d > 0, \tag{2.17}$$

$$-R(t_f) + G_{XX}(\bar{X}(t_f), t_f) = T(t_f) \geqslant 0. \tag{2.18}$$

Condition (2.16) is the well-known Lagrange-Clebsch optimal necessary condition. In order that the problem be non-singular, we must preserve the strict inequality

$$H_{UU}(t) > 0 \quad \text{for all} \quad t \in [t_0, t_f]. \tag{2.19}$$

Relations (2.12)...(2.17) are valid for all $t \in [t_0, t_f]$. Moreover, taking account of (2.19) we get

$$\delta^2 V \geqslant k S^2[\delta U(\cdot)] \quad \text{for all} \quad \delta U(.), \tag{2.20}$$

where by S we have denoted a convenient norm of $\delta U(.)$ and $k > 0$. Inequality (2.20) shows that $\delta^2 V$ is positive in the strong sense, and according to a known theorem of Gelfand and Fomin, this is sufficient in order that $\bar{U}(.)$ be minimized control function (relatively strong minimum). Accordingly, conditions (2.12)...(2.18) are sufficient for optimality in this non-singular problem.

In the differential dynamic programming these conditions imply that the corresponding Riccati matrix equation should have bounded solutions within the range $[t_0, t_f]$ (since the bounding of Bellman's function is a necessary condition of optimality).

3. Conclusion

As compared to the data published so far in the literature the sequence of restrictive relations (2.12)...(2.18) contains in addition the conditions (2.14), (2.15) and (2.17). If conditions (2.14) and (2.15) are identically satisfied the Hamiltonean expression differs from that of the case without restrictions.

It should be stressed that in equality (2.4) the weak variables have been taken without justification depending exclusively of t. Obviously, these weak variables can be either constants or functions depending on the state and control variables or even on their derivatives. In such a case both the calculation algorithm and the sufficiency conditions deduced above

are modified. In one of our further notes we shall study comparatively these cases. Likewise, the linear relation (2.10) must be discussed as concerns the approximation introduced and its validity.

Received September 21, 1971

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Mathematics II
and
University of Alberta, Edmonton,
Canada

REFERENCES

1. Lastman G. J., *An Integral Equation Function-Space Method for solving Inequality Constrained Optimal Control Problems.* Intern. J. Control, **12**, *3*, 511—525, (sept. 1970).
2. Jacobson D. H., *Sufficient Conditions for Non-negativity of the Second Variation in Singular and Non-singular Control Problems.* SIAM J. Control, **8**, *3*, 403—423 (1970).
3. Jacobson D. H., *Second-Order and Second Variation Methods for Determining Optimal Control: A Comparative Study using Differential Dynamic Programming.* Intern. J. Control, **7**, *2*, 175—197 (1968).
4. Mitter S. K., *Successive Approximation Methods for the Solutions of Optimal Control Problems.* Automatica, **3**, 135—149 (1966).
5. McReynolds S. R., Bryson A. E., *A Successive Sweep Method for Solving Optimal Programming Problems.* Proc. Joint Automatic Control Conference, Troy, N Y, 551—555 (1965).
6. Lasdon L. S., Warren A. D., Rice R. K., *An Interior Penalty Method for Inequality Constrained Optimal Control Problems.* IEEE Trans. Automatic Control, AC—12, 388—395 (1967).
7. Lasdon L. S., Mitter S. K., Warren A. D., *The Conjugate Gradient Method for Optimal Control Problems.* IEEE Trans. Automatic Control, AC—12, 2, 132—139 (1967).
8. Mangeron D., Oğuztöreli M. N., Poteraşu V. F., *Sur les systèmes optimaux aux paramètres.* Bull. Acad. R. Sci. Belgique, 5-e série, LVI, 7, 700—706 (1970).

PROBLEME DE CONTROL NESINGULARE

I. Condiţii suficiente de non negativitate a variaţiei a doua

(Rezumat)

Autorii expun un şir de noi condiţii suficiente de non negativitate a variaţiei a doua referitoare la probleme de control nesingulare avînd ca restricţii inegalităţi algebrice care conţin şi inegalităţi privitoare la control. Într-o Notă ulterioară lucrarea se continuă cu aplicarea metodei ecuaţiei integrale în spaţii funcţionale la rezolvarea problemelor de optimizare din mecanica corpurilor deformabile. În aşa fel se ilustrează pentru prima oară în literatura de specialitate aspectele teoretice ale metodei variaţiei a doua elaborată de G. J. Lastman în 1970 [1], şi se continuă totodată şirul de lucrări ale autorilor (a se vedea, de ex., [8]).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 531.31

SUR LES LIAISONS NONHOLONOMES IMPOSÉES AUX SYSTÈMES MÉCANIQUES AYANT DES SOLIDES RIGIDES COMME ÉLÉMENTS CONSTITUTIFS

II. LIAISONS NONHOLOMES RÉALISÉES PAR DES APPUIS AVEC ROULEMENT SANS GLISSEMENT

PAR

N. IRIMICIUC, ELISABETA RUSU et I. IBĂNESCU

1. Introduction

Dans cette deuxième Note seront examinés quelques types de liaisons nonholonomes rencontrées souvent dans la pratique, liaisons qui sont réalisées à l'aide des corps qui roulent sans glissement.

2. Liaisons nonholonomes

2.1. Liaison réalisée par un disque mince prévu d'une bordure aigue

Le disque mince, prévu d'une bordure aigue, roule sans glissement sur un plan Π_1 qui a, à son tour, un mouvement plan-parallèle dans le plan fixe Ox_1x_2 (fig. 1). Le repère cartésien $Q_1x_1'^{(1)}x_2'^{(1)}x_3'^{(1)}$ attaché au plan Π_1 a l'axe $Q_1x_3'^{(1)}$ normale au plan Π_1. Le repère cartésien $Q_2x_1'^{(2)}x_2'^{(2)}x_3'^{(2)}$ invariablement lié au disque a l'origine dans le centre du disque, l'axe $Q_2x_3'^{(2)}$ orientée au long du vecteur vitesse angulaire de roulement, $\bar{\omega}_{roul}$, l'axe $Q_2x_1'^{(2)}$ parallèle à l'instant $t = 0$ à la droite d'intersection du plan méridien du disque avec le plan Π_1 et l'axe $Q_2x_2'^{(2)}$ complétant le trièdre triorthogonale droit.

Les conditions d'appuis du disque sur le plan Π_1 et de roulement sans glissement seront traduites par les relations :

$$x_{Q23} = R \sin \theta_{2n}, \tag{II.1}$$

où R représente le rayon du disque et :

$$\bar{v}_{Q_2} - \bar{v}_{Q_1} + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}'^{(2)}_{C_2} - \bar{\omega}_1 \times \bar{r}'^{(1)}_{C_1} = \bar{\omega}_{2r} \times \bar{r}'^{(2)}_{C_2}, \tag{II.2}$$

$\bar{\omega}_{2r}$ désignant le vecteur vitesse angulaire de rotation propre du disque.

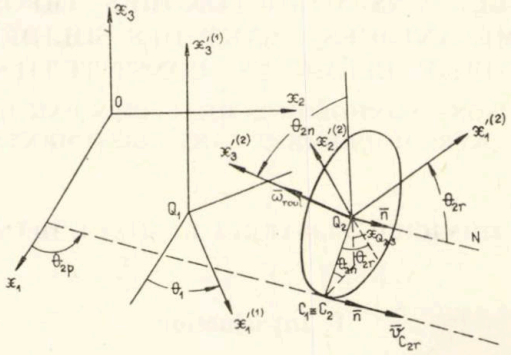


Fig. 1

L'équation vectorielle (II.2) est équivalente au système d'équations scalaires :

$$\begin{gathered} \dot{x}_{Q_{2\sigma}} - \dot{x}_{Q_{1\sigma}} - \delta_{3j\sigma}(x_{Q_{2j}} - x_{Q_{1j}} - \xi_j)\dot{\theta}_1 + \delta_{3j\sigma}\xi_j \dot{\theta}_{2p} + \\ + (\delta_{ij\sigma}\alpha^{(2)}_{3i}\xi_j - R\alpha^{(2)}_{n\sigma})\dot{\theta}_{2r} + \delta_{ij\sigma}\alpha^{(2)}_{ni}\xi_j \dot{\theta}_{2n} = 0, \\ (i, j = 1, 2, 3; \quad \sigma = 1, 2), \end{gathered} \tag{II.3}$$

où i, j sont des indices de sommation, ξ_j les projections sur les axes fixes Ox_j des vecteurs $\bar{r}'^{(2)}_{C_2} = \overrightarrow{Q_2C_2}$;

$$\begin{gathered} \xi_j = \mathrm{pr}_{i_j} \bar{r}'^{(2)}_{C_2} = (x'^{(2)}_{C_{2l}} \bar{i}'^{(2)}_l)\, \bar{i}_j = x'^{(2)}_{C_{2l}} \alpha^{(2)}_{lj} = \xi_j(\theta_{2p}, \theta_{2r}, \theta_{2n}), \\ (l = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3); \end{gathered} \tag{II.4}$$

$\alpha^{(2)}_{n\sigma}$ sont les cosinus directeurs de la ligne des noeds du disque par rapport aux axes fixes et $\alpha^{(2)}_{\mu\nu}$ — les cosinus directeurs des axes liées au disque par rapport aux axes fixes.

On voit donc que la liaison analysée est exprimée par deux équations de liaison qui ont la forme générale :

$$b^{\circ}_{ij}\dot{x}_{Q_{1j}} + b^{\circ}_{ie}\dot{\theta}_{ie} = 0, \tag{II.5}$$
$$(i = 1, 2, \ldots n; \quad j = 1, 2, 3; \quad e = p, r, n; \quad \rho = 1, 2),$$

avec :

$$\begin{cases} b^{\circ}_{ij} = b^{\circ}_{ij}(x_{Q_1}, x_{Q_2}, \theta_{1e}, \theta_{2e}); \\ b^{\circ}_{ie} = b^{\circ}_{ie}(x_{Q_1}, x_{Q_2}, \theta_{1e}, \theta_{2e}). \end{cases} \tag{II.6}$$

Si l'on multiplie, scalaire, l'équation (II.2) avec le vecteur unitaire

$$\bar{\beta} = \bar{\beta}_1 = -\bar{\beta}_2 \tag{II.7}$$

normal à la ligne des noeuds Q_2 V et situé dans le plan Π_1, on obtient la condition restrictive imposée par la liaison aux paramètres cinématiques de premier ordre du système mécanique :

$$\bar{\beta}_i \bar{v}_{Q_i} + \bar{\mathcal{M}}_{Q_i}(\bar{\beta}_i)\bar{\omega}_i = 0, \quad (i = 1, 2,), \tag{II.8}$$

le vecteur introduit, $\bar{\beta}$, étant donc le paramètre vectoriel de la liaison.

La dérivation par rapport au temps de l'équation (II.8) conduit ensuite à la condition restrictive imposée par la liaison aux paramètres cinématiques de deuxième ordre :

$$\bar{\beta}_i \bar{a}_{Q_i} + \bar{\mathcal{M}}_{Q_i}(\bar{\beta}_i)\bar{\varepsilon}_i + \Phi = 0, \quad (i = 1, 2), \tag{II.9}$$

Φ désignant les termes qui ne contiennent pas les accélérations.

Si le plan Π_1 est fixe, la liaison devient extérieure et les équations (II.3), (II.8) et (II.9) prennent, avec des notaions simplifiées ($x_{Q_{1\sigma}} = 0$, $\theta_1 = 0$, $x_{Q_{2\sigma}} = x_{Q_\sigma}$, $\theta_{2e} = \theta_e$, $\alpha^{(2)}_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu}$) les formes :

$$\dot{x}_{Q\sigma} + \delta_{3j\sigma}\xi_j\dot{\theta}_p + (\delta_{ij\sigma}\alpha_{3i}\xi_j - R\alpha_{n\sigma})\dot{\theta}_r + \delta_{ij\sigma}\alpha_{nt}\xi_j\dot{\theta}_n = 0, \tag{II.10}$$
$$(i, j = 1, 2, 3, ; \quad \sigma = 1, 2)$$

respectivement :

$$\bar{\beta}\bar{v}_Q + \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{\beta})\bar{\omega} = 0 \tag{II.11}$$

et

$$\bar{\beta}\bar{a}_Q + \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{\beta})\bar{\varepsilon} + \Phi = 0. \tag{II.12}$$

Si le plan Π_1 est fixe et le pôle dans le disque est pris dans le point de contact C ($\xi_j = 0$), les équations (II.3) prennent les forme concrètes :

$$\text{(II.13)} \qquad \begin{cases} \dot{x}_{Q_1} - R\cos\theta_p\,\dot{\theta}_r = 0, \\ \dot{x}_{Q_2} - R\sin\theta_p\,\dot{\theta}_r = 0, \end{cases}$$

rencontrées dans la littérature [5].

2.2. Liaison réalisée par tore rigide qui roule sans glissement

Au tore (Tr) (fig. 2), est attaché le repère cartésien $Q_2x_1'^{(2)}x_2'^{(2)}x_3'^{2)}$ — avec l'origine dans le centre du tore, avec l'axe $Q_2x_3'^{(2)}$ orientée au long de l'axe de révolution du tore, avec l'axe $Q_2x_1'^{(2)}$ orientée, à l'instant $t = 0$, parallèlement à la droite Δ_{C_2} d'intersection entre le plan du cercle parallèle du tore qui correspond au point de contact C_2 et le plan Π_1, sur qui roule,

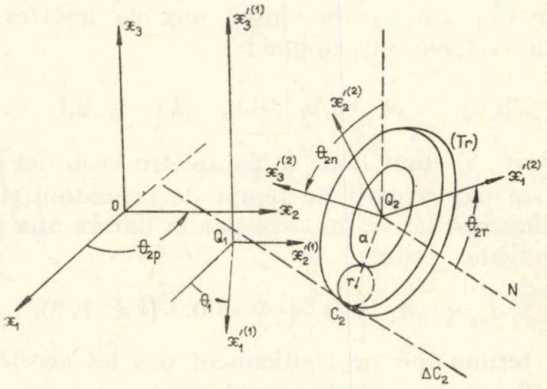


Fig. 2

sans glissement, le tore. Le plan Π_1, auquel est attaché le repère $Q_1x_1'^{(1)}x_2'^{(1)}x_3'^{(1)}$ — avec l'axe $Q_1x_3'^{(1)}$ normale au plan — se déplace, à son tour, par un mouvement plan-parallèle, dans le plan fixe Ox_1x_2.

Le roulement sans glissement du tore sur le plan Π_1 se produit en deux diréctions principales :

a) dans la direction du cercle méridien qui correspond au point de contact C_2, à la suite de la variation de l'angle de nutation, θ_{2n}, indépendante de la rotation du plan Π_1 ;

b) dans la direction du cercle parallèle qui correspond au point de contact C_2, de rayon :

$$\text{(II.14)} \qquad R_{C_2} = a + r\sin\theta_{2n},$$

(r est le rayon du cercle de section transversale et a est le rayon intérieur du tore).

Les conditions de l'appui du tore sur le plan et de roulement sans glissement se traduisent par les relations :

$$x_{Q_{23}} = r + a \sin \theta_{2n} \tag{II.15}$$

et :

$$\bar{v}_{Q_2} - \bar{v}_{Q_1} - \bar{\omega}_1 \times \bar{r}'^{(1)}_{C_1} + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}'^{(2)}_{C_2} = r\dot{\theta}_{2n}\bar{n}_1^{(2)}, \tag{II.16}$$

où $\bar{n}_1^{(2)}$ est le vecteur unitaire normal à la droite Δ_{C_2} et situé dans le plan Π_1 et $\bar{n}^{(2)}$ est le vecteur unitaire de la ligne des noeuds du tore.

La projection de l'équation (II.16) sur les axes fixes conduit tout en tenant compte des expressions :

$$\omega_{2\sigma} = \delta_{\sigma 3}\dot{\theta}_{2p} + \alpha^{(2)}_{3\sigma}\dot{\theta}_{2r} + \alpha^{(2)}_{n\sigma}\dot{\theta}_{2n}, \tag{II.17}$$

aux équations scalaires de la liaison analysée :

$$\begin{aligned} &\dot{x}_{Q_{2\sigma}} - \dot{x}_{Q_{1\sigma}} - [\delta_{3j\sigma}\xi_{1j} - (a + r\sin\theta_{2n})\cos\theta_{2n}\alpha^{(2)}_{n\sigma}]\dot{\theta}_1 + \\ &+ [\delta_{3j\sigma}\xi_{2j} - (a + r\sin\theta_{2n})\cos\theta_{2n}\alpha^{(2)}_{n}]\,\dot{\theta}_{2p} + [\delta_{ij\sigma}\alpha^{(2)}_{3i}\xi_{2j} - \\ &- (a + r\sin\theta_{2n})\alpha^{(2)}_{n\sigma}]\dot{\theta}_{2r} + [\delta_{ij\sigma}\alpha^{(2)}_{ni}\xi_{2j} - r\alpha^{(2)}_{n_1\sigma}]\,\dot{\theta}_{2n} = 0, \\ &(i,j = 1,2,3\,;\quad \sigma = 1,2), \end{aligned} \tag{II.18}$$

$$(\xi_{1_j} = \mathrm{pr}_{1_j}\bar{r}'^{(1)}_{C_1} = \xi_{\bar{i}_j}(x_{Q_{v\sigma}}, \theta_{ve});\ \xi_{2j} = \mathrm{pr}_{\bar{i}_j}\bar{r}'^{(2)}_{C_2} = \xi_{2j}(x_{Q_{v\sigma}}, \theta_{ve})).$$

On obtient donc de nouveau pour les équations de la liaison la forme (II.5), avec des expressions analogues pour les coefficients b°_{ij} et b°_{ie}.

L'introduction des vecteurs unitaires :

$$\begin{cases} \bar{n}_1^{(2)} = -\bar{\beta}_1^{(1)} = \bar{\beta}_2^{(1)}, \\ \bar{n}^{(2)} = -\bar{\beta}_1^{(2)} = \bar{\beta}_2^{(2)}, \end{cases} \tag{II.19}$$

permet d'obtenir, après leur multiplication scalaire avec les termes de l'equation (II.16), les relations :

$$\begin{aligned} &\bar{\beta}_1^{(1)}\bar{v}_{Q_1} + \bar{\beta}_2^{(1)}\bar{v}_{Q_2} + \bar{\mathcal{M}}_{Q_1}(\bar{\beta}_1^{(1)})\,\bar{\omega}_1 + \bar{\mathcal{M}}_{Q_2}(\bar{\beta}_2^{(1)})\,\bar{\omega}_2 = r\dot{\theta}_{2n}\,; \\ &\bar{\beta}_1^{(2)}\bar{v}_{Q_1} + \bar{\beta}_2^{(2)}\bar{v}_{Q_2} + \bar{\mathcal{M}}_{Q_1}(\bar{\beta}_1^{(2)})\bar{\omega}_1 + \bar{\mathcal{M}}_{Q_2}(\bar{\beta}_2^{(2)})\bar{\omega}_2 = \\ &= (a + r\sin\theta_{2n})[(\dot{\theta}_{2p} - \dot{\theta}_1)\cos\theta_{2n} + \dot{\theta}_{2r}]. \end{aligned} \tag{II.20}$$

On voit que seulement dans les conditions

$$\theta_{2n} = \theta^0_{2n} = \text{const.},$$

et donc

$$\dot{\theta}_{2n} = 0,$$

la première des équations (II.20) prendra la forme :

$$\overline{\beta}_i^{(1)} v_{Q_i} + \overline{\mathcal{M}}_{Q_i}(\overline{\beta}_i^{(1)})\overline{\omega}_i = 0, \quad (i = 1, 2) \tag{II.21}$$

et représentera la condition restrictive imposée par la liaison analysée aux paramètres cinématiques de premier ordre du système mécanique, $\overline{\beta}_1^{(1)}$ et $\overline{\beta}_2^{(1)}$ étant, dans cette situation, les paramètres vectoriels de la liaison.

Si le plan Π_1 est fixe ($x_{Q_{11}} = x_{Q_{12}} = 0$, $\theta_1 = 0$, $x_{Q_{2\sigma}} = x_{Q_\sigma}$, $\theta_{2e} = \theta_e$, $\xi_{2j} = \xi_j$, $\alpha^{(2)}_{n\sigma} = \alpha_{n\sigma}$, $\alpha^{(2)}_{3i} = \alpha_{3i}$, $\alpha^{(2)}_{n_1\sigma} = \alpha_{n_1\sigma}$), on obtient pour les équations (II.18) la forme simplifiée :

$$\begin{aligned} &\dot{x}_{Q_\sigma} + [\delta_{3j\sigma}\xi_j - (a + r\sin\theta_n)\cos\theta_n\,\alpha_{n\sigma}]\dot{\theta}_p + [\delta_{ij\sigma}\alpha_{3i}\xi_j - \\ &- (a + r\sin\theta_n)\alpha_{n\sigma}]\dot{\theta}_r + [\delta_{ij\sigma}\alpha_{ni}\xi_j - r\alpha_{n_1\sigma}]\dot{\theta}_n = 0, \\ &(i, j = 1, 2, 3; \quad \sigma = 1, 2). \end{aligned} \tag{II.22}$$

Dans les mèmes conditions les équations (II.20) et (II.21) prennent les formes ($\overline{\beta}_2^{(1)} = \overline{\beta}^{(1)}$, $\overline{\beta}_2^{(2)} = \overline{\beta}^{(2)}$) :

$$\begin{cases} \overline{\beta}^{(1)}\overline{v}_{Q_1} + \overline{\mathcal{M}}_Q(\overline{\beta}^{(1)})\overline{\omega} = r\dot{\theta}_n, \\ \overline{\beta}^{(2)}\overline{v}_{Q_2} + \overline{\mathcal{M}}_Q(\overline{\beta}^{(2)})\overline{\omega} = (a + r\sin\theta_n)(\dot{\theta}_p\cos\theta_n + \dot{\theta}_r) \end{cases} \tag{II.23}$$

et

$$\overline{\beta}^{(1)}\overline{v}_Q + \overline{\mathcal{M}}_Q(\overline{\beta}^{(1)})\overline{\omega} = 0, \tag{II.24}$$

si l'angle de nutation reste constant.

Les relations (II.22), (II.23) et (II.24) correspondent à la liaison extérieure.

Enfin, si le plan Π_1 est fixe et le pôle Q est pris dans le point de contact C_2 ($\xi_{2j} = \xi_j = 0$), on obtient les équations de liaisons cinématiques établies dans [5] :

$$\begin{cases} \dot{x}_{Q_1} - (a + r\sin\theta_n)\cos\theta_p(\cos\theta_n\,\dot{\theta}_p + \dot{\theta}_r) + r\dot{\theta}_n\sin\dot{\theta}_p = 0, \\ \dot{x}_{Q_2} - (a + r\sin\theta_n)\sin\theta_p(\cos\theta_n\,\dot{\theta}_p + \dot{\theta}_r) - r\dot{\theta}\cos\dot{\theta}_p = 0. \end{cases} \tag{II.25}$$

2.3. Liaison réalisée par sphère qui roule sans glissement

La sphère de rayon R, à laquelle est attaché le repère cartésien $Q_2 x_1'^{(2)} x_2'^{(2)} x_3'^{(2)}$ — avec l'origine Q_2 dans le centre de la sphère et les axes $Q_2 x_\sigma'^{(2)}$ parallèles à l'instant $t = 0$, aux axes fixes Ox_σ ($\sigma = 1, 2, 3$) — roule, sans glissement, sur le plan Π_1, — auquel est attaché le repère $Q_1 x_1'^{(1)} x_2'^{(1)} x_3'^{(1)}$ en mouvement plan-parallèle dans le plan fixe Ox_1x_2 (fig. 3).

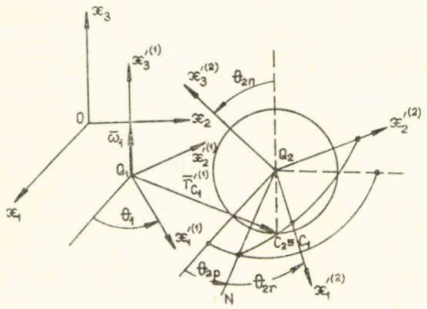


Fig. 3

Les conditions de l'appui de la sphère sur le plan Π_1 et de roulement sans glissement seront traduites par les équations

$$x_{Q_{23}} = R \tag{II.26}$$

et

$$\bar{v}_{Q_2} - \bar{v}_{Q_1} + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_{c_2}'^{(2)} - \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_{c_1}'^{(1)} = 0. \tag{II.27}$$

La dernière équation est équivalente au système d'équations scalaires de liaison, obtenues par la projection de (II.27) sur les axes fixes :

$$\dot{x}_{Q_{2\sigma}} - \dot{x}_{Q_{1\sigma}} - \delta_{i3\sigma}\alpha_{3i}^{(2)} R\dot{\theta}_{2r} - \delta_{i3\sigma}\alpha_{ni}^{(2)} R\dot{\theta}_{2n} - \delta_{3j\sigma}(x_{Q_{2j}} - x_{Q_{1j}})\dot{\theta}_1 = 0, \tag{II.28}$$
$$(i, j = 1, 2, 3; \quad \sigma = 1, 2),$$

c'est-à-dire, de nouveau des équations de la forme (II.5).

Si

$$\begin{cases} \bar{n}_1 = \bar{\beta}_2^{(1)} = -\bar{\beta}_1^{(1)}, \\ \bar{n}_2 = \bar{\beta}_2^{(2)} = -\bar{\beta}_1^{(2)} \end{cases} \tag{II.29}$$

sont deux vecteurs unitaires orthogonals situés dans le plan Π_1, on obtient de (II.27), par multiplication scalaire avec eux, les conditions restrictives pour les paramètres cinématiques de premier ordre :

(II.30) $$\bar{\beta}_i^{(\rho)}\bar{v}_{Q_i} + \bar{\mathcal{M}}_{Q_i}(\bar{\beta}_i^{(\rho)})\bar{\omega}_i = 0, \quad (i = 1, 2; \quad \rho = 1, 2)$$

et après la dérivation par rapport au temps, on obtient aussi les conditions restrictives pour les paramètres cinématiques de deuxième ordre :

(II.31) $$\bar{\beta}_i^{(\rho)}\bar{a}_{Q_i} + \bar{\mathcal{M}}_{Q_i}(\bar{\beta}_i^{(\rho)})\bar{\varepsilon}_i + \Phi = 0.$$

Si le plan Π_1 a seulement un mouvement de rotation autour d'un axe fixe ($x_{Q_{11}} = x_{Q_{12}} = 0$) les équations (II.28) prennent les formes concrètes établies dans [5] :

(II.32) $$\begin{cases} \dot{x}_{Q_{21}} + R\dot{\theta}_{2r}\cos\theta_{2p}\sin\theta_{2n} - R\dot{\theta}_{2n}\sin\theta_{2p} + x_{Q_{22}}\dot{\theta}_1 = 0, \\ \dot{x}_{Q_{22}} + R\dot{\theta}_{2r}\sin\theta_{2p}\sin\theta_{2n} + R\dot{\theta}_{2n}\cos\theta_{2p} - x_{Q_{21}}\dot{\theta}_1 = 0 \end{cases}$$

et les conditions restrictives (II.30) deviennent :

(II.33) $$\bar{\beta}_2^{(\rho)}\bar{v}_{Q_2} + \bar{\mathcal{M}}_{Q_i}(\bar{\beta}_i^{(\rho)})\bar{\omega}_i = 0, \quad (i = 1, 2; \quad \rho = 1, 2).$$

Enfin, si le plan Π_1 est fixe ($x_{Q_{11}} = x_{Q_{12}} = 0$, $\theta_1 = 0$), les équations (II.28) et (II.30) deviennent :

(II.34) $$\begin{cases} \dot{x}_{Q_{21}} + R\dot{\theta}_{2r}\cos\theta_{2p}\sin\theta_{2n} - R\dot{\theta}_{2n}\sin\theta_{2p} = 0, \\ \dot{x}_{Q_{22}} + R\dot{\theta}_{2r}\sin\theta_{2p}\sin\theta_{2n} + R\dot{\theta}_{2n}\cos\theta_{2p} = 0 \end{cases}$$

et

(II.35) $$\bar{\beta}^{(\rho)}\bar{v}_{Q_2} + \bar{\mathcal{M}}_{Q_2}(\bar{\beta}^{(\rho)})\bar{\omega}_2 = 0.$$

III. Conclusions

Après l'analyse éffectuée, autant dans [4] que dans la Note présente, sur les principaux types de liaison nonholonomes de mobilité linéaire rencontrées dans les applications techniques — liaisons considérées non seulement extérieures, mai aussi intérieures dans les systèmes mécaniques — on peut tirer quelques conclusions qui présenteront beaucoup d'intérêt dans la reconstruction de la mécanique analytique fondée sur le solide rigide comme modèle mécanique :

1. Chaque liaison nonholonome réalisée par appui se traduit par une, ou par deux équations de liaison cinématiques, nonintégrables, selon le corps à l'aide duquel est réalisée la liaison : patin — qui permet le glissement sans roulement — ou disque mince, tore et sphère — qui permettent le roulement, sans glissement.

Le nombre total d'équations des liaisons nonholonomes imposées à un système mécanique qui contient seulement les types de liaisons examinés, sera donné par la relation :

(III.1) $$l = n_p + 2(n_d + n_t + n_s),$$

(n_p étant le nombre des patins, n_d — le nombre des disques, n_t — le nombre des tores et n_s — le nombre des sphères).

2. La forme générale des équations nonintégrables des liaisons cinématiques examinées est :

(III.2) $$\varphi_\rho(..., x_{Q_\nu\rho}, \theta_{\nu e}, ...; ... \dot{x}_{Q_\nu\sigma}, \dot{\theta}_{\nu e}, ... ; t) = b^\rho_{ij}\, \dot{x}_{Q\,ij} + b^\rho_{ie}\, \dot{\theta}_{ie} + b^\rho_0 = 0,$$
$$(i = 1, 2, ... n ; \quad j = 1, 2, 3 ; \quad e = p, r, n ; \quad \rho = 1, 2),$$

avec :

(III.3) $$\begin{cases} b^\rho_{ij} = b^\rho_{ij}(..., x_{Q_\nu\sigma}, \theta_{\nu e}, ... ; t), \\ b^\rho_{ie} = b^\rho_{ie}(..., x_{Q_\nu\sigma}, \theta_{\nu e}, ... ; t), \\ b^\rho_0 = b^\rho_0 (..., x_{Q_\nu\sigma}, \theta_{\nu e}, ... ; t), \end{cases}$$

si le système mécanique est réonome, et :

(III.4) $$\begin{cases} b^\rho_{ij} = b^\rho_{ij}(..., x_{Q_\nu\sigma}, \theta_{\nu e}, ...), \\ b^\rho_{ie} = b^\rho_{ie}(..., x_{Q_\nu\sigma}, \theta_{\nu e}, ...), \\ b^\rho_0 = 0, \end{cases}$$

si le système est scléronome.

3. Chaque liaison nonholonome étudiée impose aux paramètres cinématiques, de premier et de deuxième ordre, des solides (S_μ) et (S_ν) entre lesquels elle est appliquée, des conditions restrictives de la forme :

(III.5) $$\bar{\beta}^\sigma_j \bar{v}_{Q_j} + \bar{\mathcal{M}}_{Q_j}(\bar{\beta}^\sigma_j)\bar{\omega}_j = 0$$

et :

(III.6) $$\bar{\beta}^\sigma_j \bar{a}_{Q_j} + \bar{\mathcal{M}}_{Q_j}(\bar{\beta}^\sigma_j)\,\bar{\varepsilon}_j + \Phi^\sigma = 0,$$
$$(j = \mu, \nu),$$

avec $\sigma = 1$, si la liaison est réalisée par patin, disque et tore avec l'angle de nutation constante et $\sigma = 1, 2$, si la liaison est réalisée par sphère.

4. Les vecteurs $\bar{\beta}^\sigma_j$ représentent les paramètres vectoriels de la liaison nonholonome appliquée entre les solides (S_μ) et (S_ν) :

(III.7) $$\bar{\beta}^\sigma_\mu = - \bar{\beta}^\sigma_\nu ;$$

il sont situés dans le plan Π_1, normals aux lignes des noeuds dans les appuis réalisés par patins, disques et tores avec l'angle de nutation constant.

Les paramètres vectoriels des liaisons cinématiques nonholonomes indiquent les directions des réactions des liaisons nonholonomes, c'est-à-dire qu'on peut écrire, pour les composantes des torseurs dans les pôles Q_μ et Q_ν des réactions de la liaison nonholonome qui impose les conditions restrictives (III.5), les expressions :

$$(\text{III.8}) \quad \overline{\mathcal{C}}_{Q_\mu}(\overline{N}^\sigma_{\mu\nu}) : \begin{cases} \overline{N}^\sigma_{\mu\nu} = \lambda^\sigma_{\mu\nu}\overline{\beta}^\sigma_\mu, \\ \overline{\mathfrak{M}}_{Q_\mu}(\overline{N}^\sigma_{\mu\nu}) = \overline{\mathcal{M}}_{Q_\mu}(\overline{N}^\sigma_{\mu\nu}) = \overline{\mathcal{M}}_{Q_\mu}(\lambda^\sigma_{\mu\nu}\overline{\beta}^\sigma_\mu) = \lambda^\sigma_{\mu\nu}\overline{\mathcal{M}}_{Q_\mu}(\overline{\beta}^\sigma_\mu) \end{cases}$$

et

$$(\text{III.9}) \overline{\mathcal{C}}_{Q_\nu}(\overline{N}^\circ_{\nu\mu}) : \begin{cases} \overline{N}^\sigma_{\nu\mu} = \lambda^\sigma_{\nu\mu}\overline{\beta}^\sigma_\nu = -\lambda^\sigma_{\nu\mu}\overline{\beta}^\sigma_\mu = -\lambda^\sigma_{\mu\nu}\overline{\beta}^\sigma_\mu, \\ \overline{\mathfrak{M}}_{Q_\nu}(\overline{N}^\sigma_{\nu\mu}) = \overline{\mathcal{M}}_{Q_\nu}(\overline{N}^\sigma_{\nu\mu}) = \overline{\mathcal{M}}_{Q_\nu}(\lambda^\sigma_{\nu\mu}\overline{\beta}^\sigma_\nu) = \lambda^\sigma_{\nu\mu}\overline{\mathcal{M}}_{Q_\nu}(\overline{\beta}^\sigma_\nu) = \lambda^\sigma_{\mu\nu}\overline{\mathcal{M}}_{Q_\nu}(\beta^\sigma_\nu). \end{cases}$$

5. Les déplacements virtuels du système mécanique, définis par les relations :

$$(\text{III.10}) \qquad \delta\overline{r}_{Q_\nu} = \frac{\partial\overline{r}_{Q_\nu}}{\partial q_j}\,\delta q_j, \quad (j = 1, 2, \ldots p)$$

et :

$$(\text{III.11}) \qquad \delta\theta_\nu = \frac{\partial\overline{\theta}_\nu}{\partial q_j}\,\delta q_j, \quad (j = 1, 2, \ldots p),$$

avec :

$$(\text{III.12}) \qquad \frac{\partial\overline{\theta}_\nu}{\partial q_j} = \frac{\partial\theta_{\nu p}}{\partial q_j}\,\overline{i}_3 + \frac{\partial\theta_{\nu r}}{\partial q_j}\,\overline{i}^{\prime(\nu)}_3 + \frac{\partial\theta_{\nu n}}{\partial q_j}\,\overline{n}^{(\nu)},$$

(où p représente le nombre des coordonnées généralisées du système) doivent satisfaire, en vertu des conditions (III.5), les conditions suivantes de compatibilité aux liaisons :

$$(\text{III.13}) \qquad \overline{\beta}^\sigma_j\,\delta\overline{r}_{Q_j} + \overline{\mathcal{M}}_{Q_j}(\overline{\beta}^\sigma_j)\delta\overline{\theta}_j = 0, \quad (j = \mu, \nu).$$

6. Le travail virtuel des réactions de la liaison nonholonome appliquée entre les solides (S_μ) et (S_ν), traduite par les conditions restrictives (III.5), sera donné par la relation :

$$(\text{III.14}) \qquad \delta\mathcal{L}_{\mu\nu} = \sum_\sigma \delta\mathcal{L}^\sigma_{\mu\nu} = \lambda^k_{\mu\nu}[\overline{\beta}^k_j\,\delta\overline{r}_{Q_j} + \overline{\mathcal{M}}_{Q_j}(\overline{\beta}^k_j)\delta\overline{\theta}_j],$$
$$(k = 1, \quad \text{ou} \quad k = 1, 2\,; \quad j = \mu, \nu),$$

d'où, en vertu des conditions (III.13), il en résulte :

$$(\text{III.15}) \qquad \delta\mathcal{L}_{\mu\nu} = 0,$$

et, donc, la justification rigoureuse de l'égalité avec zéro du travail virtuel des réactions des liaisons nonho onomes idéales.

Reçue le 20 octobre 1971

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mécanique théorique

BIBLIOGRAPHIE

1. Irimiciuc N., *Asupra unei noi forme de prezentare a mecanicii analitice pentru sisteme olonome.* Bul. Inst. polit. Iași, X (XIV), *3—4* (1964).
2. Irimiciuc N., Ibănescu I., Rusu E., *Sur le problème des liaisons holonomes imposées aux systèmes de solides rigides* (I). Bul. Inst. polit. Iași, XIII (XVII), *1—2* (1967).
3. Irimiciuc N., Ibănescu I., Rusu E., *Sur le problème des liaisons holonomes imposées aux systèmes de solides rigides* (II). Bul. Inst. polit. Iași, XIII (XVII), *3—4* (1967).
4. Irimiciuc N., Rusu E., Neagu G., *Sur les liaisons nonholonomes imposées aux systèmes mécaniques ayant de solides rigides comme éléments constitutifs* (I). Bul. Inst. polit. Iași, XVII(XXI),*3—4*, s. IV (1971).
5. Неймарк Ю., Фуфаев Н. А., *Динамика неголономных систем.* Изд. „Наука", М., 1967.
6. Whittacker E. T., *Analytical Dynamics.* Cambridge, 1937.

ASUPRA LEGĂTURILOR NEOLONOME IMPUSE SISTEMELOR MECANICE AVÎND SOLIDE RIDIGE CA ELEMENTE CONSTITUTIVE

II. Legături neolonome realizate prin reazeme cu rostogolire fără alunecare

(Rezumat)

În această a doua notă consacrată analizei legăturilor neolonome întîlnite în aplicații, se examinează trei tipuri de legături neolonome care permit rostogolirea fără alu. necare și anume : legătura prin disc subțire cu bordură ascuțită, legătura prin tor și legătura prin sferă, toate aceste legături fiind considerate atît interioare, cît și exterioare.

Se stabilesc formele generale ale ecuațiilor legăturilor neolonome, condițiile restrictive impuse de ele parametrilor cinematici de ordinul întîi și doi ai solidelor sistemului, noile forme ale condițiilor de compatibilitate cu legăturile neolonome ale deplasărilor virtuale ale sistemului și se justifică riguros egalitatea cu zero a lucrului mecanic virtual al legăturilor neolonome ideale.

1848

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 531.01

SUR LA NOTION DE „POINT MATÉRIEL" DANS LA DYNAMIQUE DU SOLIDE DONT LA MASSE EST VARIABLE

PAR

SPIRIDON DELEANU, N. IRIMICIUC et AURORA CRĂCIUNAŞ

0. Introduction

Dans la dynamique du solide de masse constante a été introduite par l'un des auteurs, [7]...[10], une nouvelle définition pour la notion de point matériel, qui permet de considérer la présentation habituelle de la mécanique théorique comme une particularisation de la mécanique construite tout en adoptant le solide rigide comme modèle mécanique.

Dans cette Note on fait une extension de cette définition dans la dynamique des corps de masses variables au sens du modèle mécanique présenté dans les travaux [1]...[3].

I. Conditions caractéristiques pour le point matériel

Un solide de masse variable conçu dans le sens des travaux [1]...[3], peut être assimilable à un point matériel — c'est-à-dire à un corps dont le mouvement peut être décrite seulement par l'équation qui traduit le théorème de l'impulsion — dans les conditions suivantes :

1°. Conditions cinématiques concernant les mouvements relatifs des particules matériels, traduites par l'une des relations :

$$\bar{\bar{v}}_{C_t} \approx \bar{v}_C, \tag{I.1}$$

ou

$$\begin{cases} \bar{v}_{C_r} = 0, \\ \bar{a}_{C_t} \approx \bar{a}_Q, \end{cases} \tag{I.2}$$

la première, réalisable lorsque les processus d'annexion et de détachement n'affèctent pas, sensiblement, la position du centre de masse dans le solide et la deuxième série réalisable, lorsque la rotation est toute négligeable dans le mouvement de transport.

À la suite de la condition (I.1) et (I.2), l'expression de l'énergie cinétique du solide, établie dans [1], prend la forme :

$$\mathcal{E} = \left(\frac{1}{2} M \bar{v}_c^2 + \frac{1}{2} I'_{jj}\, \omega_j'^2\right) + \mathcal{E}_r + (\bar{v}_Q \bar{\mathcal{H}}_r + \bar{\omega}\, \bar{\mathcal{K}}_{Q_r}), \tag{I.3}$$

ou $j = 1, 2, 3$, est considéré indice de sommation.

2° Conditions énergétiques, traduites sous la forme :

$$\frac{I'_{jj}\, \omega_j'^2}{M \bar{v}_C^2} \approx 0, \tag{I.4}$$

réalisables lorsque les dimensions du corps sont petites et la vitesse angulaire négligeable, ce qui permet de considérer aussi :

$$\bar{r}'_{C_a} \approx \bar{r}'_{C_d} \approx \bar{r}'_C, \tag{I.5}$$

$$\bar{\mathcal{H}}_r \approx 0 \tag{I.6}$$

et

$$\frac{\bar{\omega}\, \bar{\mathcal{K}}_{Q_r}}{\frac{1}{2} M \bar{v}_C^2} \approx 0. \tag{I.7}$$

En vertu des conditions (I.5)...(I.7) l'expression (I.3) de l'énergie cinétique prend la forme toute simplifiée :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} M \bar{v}_C^2 + \mathcal{E}_r . \tag{I.8}$$

3° Conditions dynamiques concernant les solicitations appliquées au solide, dont les distributions doivent vérifier le théorème de Varignon, c'est-à-dire qu'on peut écrire les relations :

$$\begin{cases} \bar{\mathfrak{M}}_{rr} \approx \bar{\mathcal{M}}(\bar{\mathcal{F}}_{rr}) = \bar{r} \times \bar{\mathcal{F}}_{rr}, \\ \bar{\mathfrak{M}}_{rc} \approx \bar{\mathcal{M}}(\bar{\mathcal{F}}_{rc}) = \bar{r} \times \bar{\mathcal{F}}_{rc}, \\ \bar{\mathfrak{M}}_s \approx \bar{\mathcal{M}}(\bar{\mathcal{F}}_s) = \bar{r} \times \bar{\mathcal{F}}_s . \end{cases} \tag{I.9}$$

Ces relations sont satisfaites — dans les conditions mentionnées pour les dimensions — lorsque les couples qui agissent sur le solide sont complètemment négligeables.

II. Définition des points matériels de masse variables

Si toutes les conditions mentionnées ci-dessus sont satisfaites, l'équation qui traduit le théorème du moment cinétique devient une conséquence de l'équation qui traduit le théorème de l'impulsion et le solide peut être donc assimilé à un point matériel.

Tout en adoptant les notations spécifiques au point matériel ($M = m$, $M_1 = m_1$, $M_2 = m_2$, $\bar{v}_{C_t} = \bar{v}_t$, $\bar{v}_C = \bar{v}$), on peut retrouver, en vertu des conditions précisée, comme formes particulières de l'équation :

$$M\bar{a}_{C_t} = \bar{\mathcal{F}} + \bar{\mathcal{R}} + \bar{\mathcal{F}}_{rc} + \bar{\mathcal{F}}_{ri} + \bar{\mathcal{F}}_{rs} = \bar{\mathcal{F}} + \bar{\mathcal{R}} + \bar{\mathcal{F}}_r \tag{II.1}$$

établie dans [3], toutes les équations qui correspondent aux modèles mécaniques connus dans la littérature :

1°. *Le modèle mécanique de Mestcherski* pour les conditions (I.1), (I.4)... (I.7) et (I.9),
avec :

$$\bar{\mathcal{F}}_{rc} = \bar{\mathcal{F}}_s = 0 \tag{II.2}$$

(l'absence de tout mouvement relatif des particules annexées ou détachées), lorsque l'équation (II.1) prend la forme particulière :

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{\mathcal{F}} + \bar{\mathcal{R}} + \frac{dm_1^*}{dt}(\bar{v}_1^* - \bar{v}) - \frac{dm_2^*}{dt}(\bar{v}_2^* - \bar{v}). \tag{II.3}$$

2°. *Le modèle mécanique particulier de Novoselov* pour les conditions (I.1), (I.4)...(I.7) et (I.9), lorsque l'équation prend la forme :

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{\mathcal{F}} + \bar{\mathcal{F}}_r + \bar{\mathcal{F}}_s + \bar{\mathcal{R}}. \tag{II.4}$$

3°. *Le modèle mécanique générale de Novoselov* pour les conditions (I.2), (I.4)... (I.7) et (I.9) lorsque l'équation (II.1) devient :

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{\mathcal{F}} + \bar{\mathcal{F}}_r + \bar{\mathcal{F}}_s + \bar{\mathcal{R}}. \tag{II.5}$$

Reçue le 10 octobre 1971

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mécanique théorique

BIBLIOGRAPHIE

1. Deleanu Sp., Irimiciuc N., Neagu S., *Sur la dynamique du solide dont la masse est variable.* (I) *Caractéristiques dynamiques.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XVI(XX), *3—4*, s. IV (1970).
2. Deleanu Sp., Irimiciuc N., Stancu M., *Sur la dynamique du solide dont la masse est variable.* (II) *Théorèmes généraux.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XVII (XXI), *1—2*, s. IV (1971).

3. Deleanu Sp., Irimiciuc N., Crăciunaș A., *Sur les équations de la dynamique du solide dont la masse est variable.* Bul. Inst. polit. Iași, **XVII(XXI)**, *3—4*, s. IV (1971).
4. Irimiciuc N., *Asupra mișcării relative a solidului cu masă variabilă.* Bul. Inst. polit. Iași, **IV(VIII)**, *1—2* (1958).
5. Irimiciuc N., *Asupra formei ecuațiilor lui Lagrange de specia a doua pentru sisteme de puncte cu mase variabile.* Bul. Inst. polit. Iași, **IV (VIII)**, *1—2* (1958).
6. Irimiciuc N., Deleanu Sp., *Ecuații generalizate în sensul lui I. Țenov și D. Mangeron pentru sisteme de puncte materiale cu mase variabile.* Bul. Inst. polit. Iași, **XI(XV)**, *3—4* (1965).
7. Irimiciuc N., *Asupra unei noi forme de prezentare a mecanicii analitice pentru sisteme mecanice supuse la legături olonome.* Bul. Inst. polit. Iași, **X(XIV)**, *3—4* (1964),.
8. Irimiciuc N., Ibănescu I., Rusu E., *Sur le problème des liaisons holonomes imposées aux systèmes de solides rigides.* (I) *Liaisons géométriques.* Bul. Inst. polit. Iași, **XIII(XVII)**, *1—2* (1967); (II) *Liaisons cinématiques.* Ibid., **XIII (XVII)**, *3—4* (1967).
9. Irimiciuc N., Stancu M., *Une nouvelle relation pour exprimer le principe de Gauss.* Bul. Inst. polit. Iași, **XIII(XVII)**, *3—4* (1967).
10. Irimiciuc N., Deleanu Sp., *Les principes intégrales de la mécanique analytique dans la dynamique des systèmes de solides rigides.* Bul. Inst. polit. Iași, **XIV(XVIII)**, *3—4* (1967).
11. Новоселов В. С., *Некоторые вопросы механики переменных масс с учетом внутреннего движения частиц.* (I) Вестник ЛГУ, *19* (1956); (II) Вестник ЛГУ, *1* (1957).
12. Новоселов В. С., *Аналитическая механика систем с переменными массами.* Изд. ленинг. ун-та (1969).
13. Сапа В. С., *Вариационные принципы в механике переменной массы.* Изв. АН КССР, сер. матем. и мех., *5* (1956).
14. Сапа В. С., *Вариационных принципах в механике переменной массы.* Изв. АН КССР, сер. матем. и мех., *9* (1960).
15. Niang S., *Théorie des systèmes de particules. Applications.* Thèse de doctorat, Dakar, 1964.

ASUPRA NOȚIUNII DE „PUNCT MATERIAL“ ÎN DINAMICA SOLIDULUI CU MASĂ VARIABILĂ

(Rezumat)

Se extinde definiția introdusă de unul dintre autori [7]...[10] pentru punctul material cu masă constantă, în dinamica sistemelor mecanice cu masă variabilă, construită pe modelul mecanic al solidului cu masă variabilă, prezentat în lucrările [1]...[3]. Se stabilesc condițiile în care un corp cu masă variabilă poate fi asimilat cu un punct material cu masă variabilă și pe baza acestor condiții se regăsesc ecuațiile corespunzătoare diverselor modele de puncte materiale cunoscute în literatură, prin particularizarea ecuațiilor stabilite în lucrarea [3].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.01

TRADUCTOR MECANOELECTRIC TRIORTOGONAL PENTRU STUDIUL CINEMATIC AL MECANISMELOR SPAȚIALE

DE

I. SIMIONESCU, CEZAR DUCA, OCTAV MUNTEANU și CORNELIU DRĂGAN

1. Cercetările experimentale în Teoria mecanismelor, a căror importanță este subliniată deseori în literatura de specialitate [3], [5], reușesc să aducă un aport tot atît de însemnat ca și cele teoretice, la rezolvarea problemelor complexe, ridicate în sfera producției materiale. Utilizarea tot mai frecventă a mecanismelor spațiale în construcția mașinilor din diverse domenii, reclamă elaborarea și adaptarea unor noi metode de cercetare, specifice acestor mecanisme.

Pe această linie se înscrie și lucrarea de față, în care se prezintă un traductor mecanoelectric triortogonal, pentru studiul cinematic al elementelor cu mișcare spațială. Astfel, se continuă o serie de cercetări anterioare ale colectivului de Teoria mecanismelor și dinamica mașinilor, de la Institutul politehnic din Iași, privind studiul cinematicii mecanismelor prin metode experimentale [4]...[6].

2. Traductorul triortogonal constă dintr-un lanț cinematic simplu format din elementele *1*, *2* și *3* (fig. 1), legate prin cuple de translație. Elementul inițial *1* se leagă printr-o cuplă sferică de unul din elementele mecanismului spațial de studiat, iar elementul final *3*, se leagă printr-o cuplă de translație la batiu. Ghidajele xx, yy, zz sînt paralele cu axele unui sistem triortogonal fix.

Deplasările elementului *2* pe ghidajul xx, ale elementului *3* pe yy și ale elementului *1* pe zz, urmăresc aceleași legi de mișcare, ca și proiecțiile punctului P — centrul cuplei sferice, pe axele sistemului $Oxyz$. Variația deplasărilor acestor elemente se transformă, cu ajutorul a trei traductori rezistivi, în variația a trei tensiuni alternative, proporționale cu deplasările. Aceste tensiuni sînt amplificate, detectate, filtrate și introduse în osciloscopul catodic (schema bloc din fig. 2), pentru a obține diagramele $s_x(t)$, $s_y(t)$ și $s_z(t)$. Proiecțiile traiectoriei punctului P, pe cele trei plane de

coordonate : T_{xy}, T_{xz} și T_{yz} se obțin prin introducerea tensiunilor variabile, prelucrate cum s-a arătat mai sus, pe grupe de cîte două, în sistemul de baleiaj cartezian al osciloscopului catodic (fig. 2).

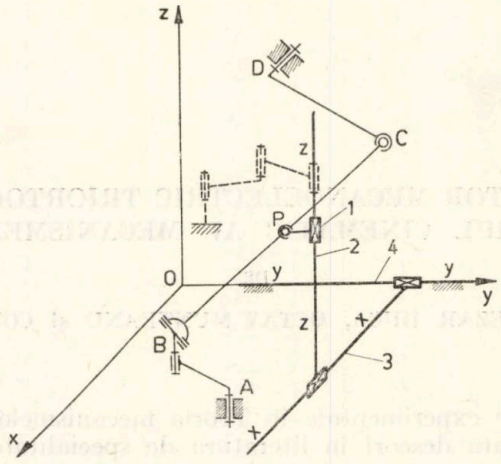


Fig. 1

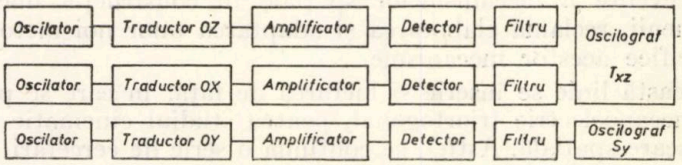


Fig. 2

Pentru studiul vitezelor punctului P, se utilizează trei traductori inductivi de tip rotativ, sub forma unor microgeneratoare de curent continuu, montate pe elementele *1*, *2*, *3* și acționate prin fricțiune de trei fire flexibile, paralele cu ghidajele. Tensiunile date de microgeneratoare sînt proporționale cu proiecțiile vitezelor pe axele sistemului $Oxyz$ și reprezintă, pe ecranul osciloscopului catodic, diagramele $v_x(t)$, $v_y(t)$ și $v_z(t)$. Prin compunerea acestor tensiuni, conform schemei bloc din fig. 3, se înscriu proiecțiile hodografului vitezelor punctului P, pe cele trei plane de coordonate : v_{xy}, v_{xz}, v_{yz}.

Diagramele de variație ale proiecțiilor accelerațiilor pe axele sistemului $Oxyz$: $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$, precum și proiecțiile hodografului accelerațiilor, pe planele de coordonate, a_{xy}, a_{xz}, a_{yz}, se obțin în urma derivării electrice a tensiunilor furnizate de cele trei microgeneratoare, așa cum rezultă din schema bloc din fig. 4.

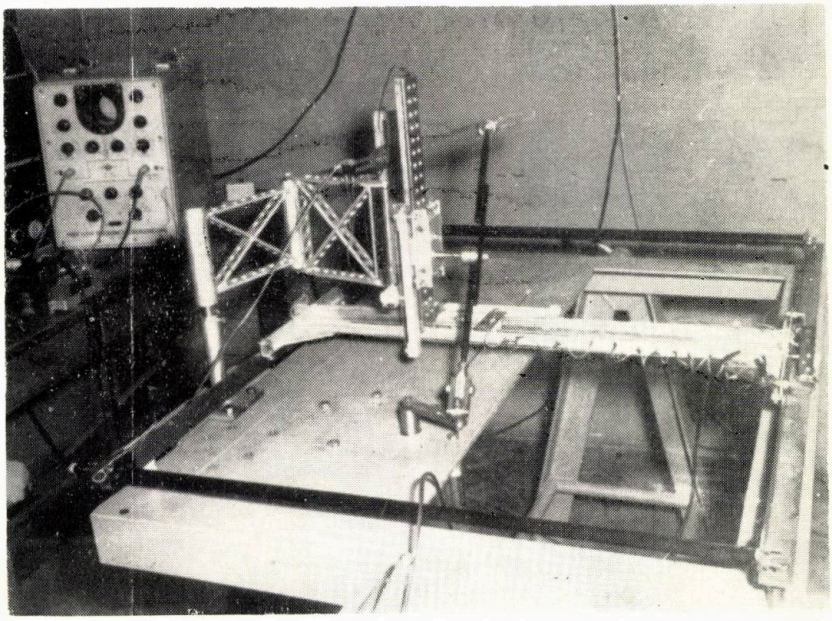
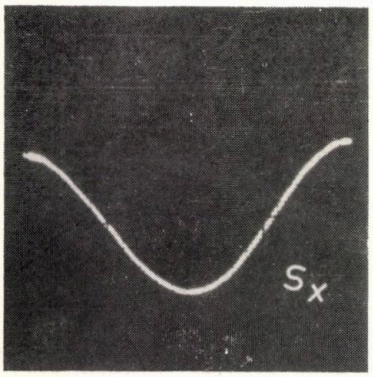
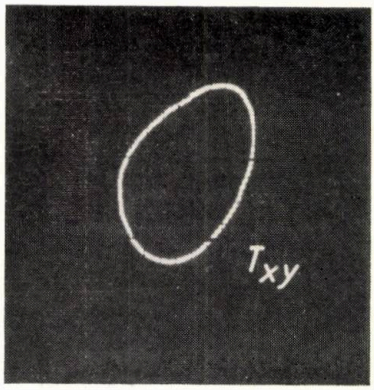
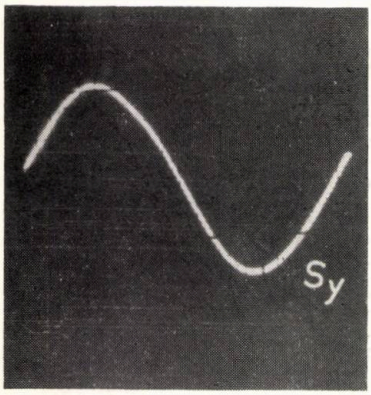
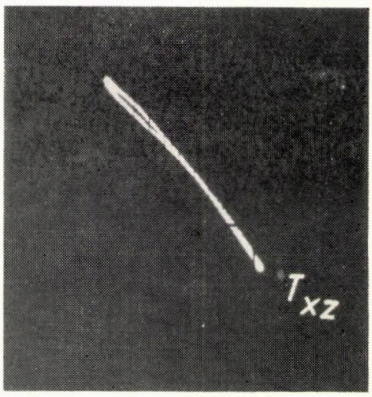


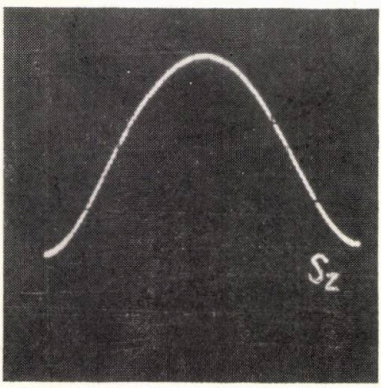
Fig. 5











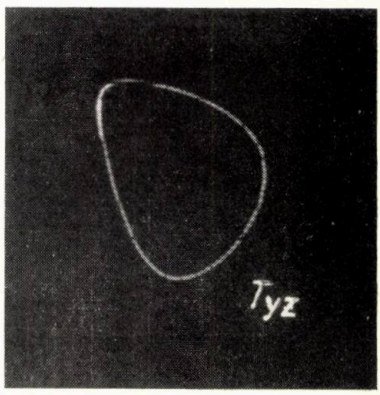


Fig. 6

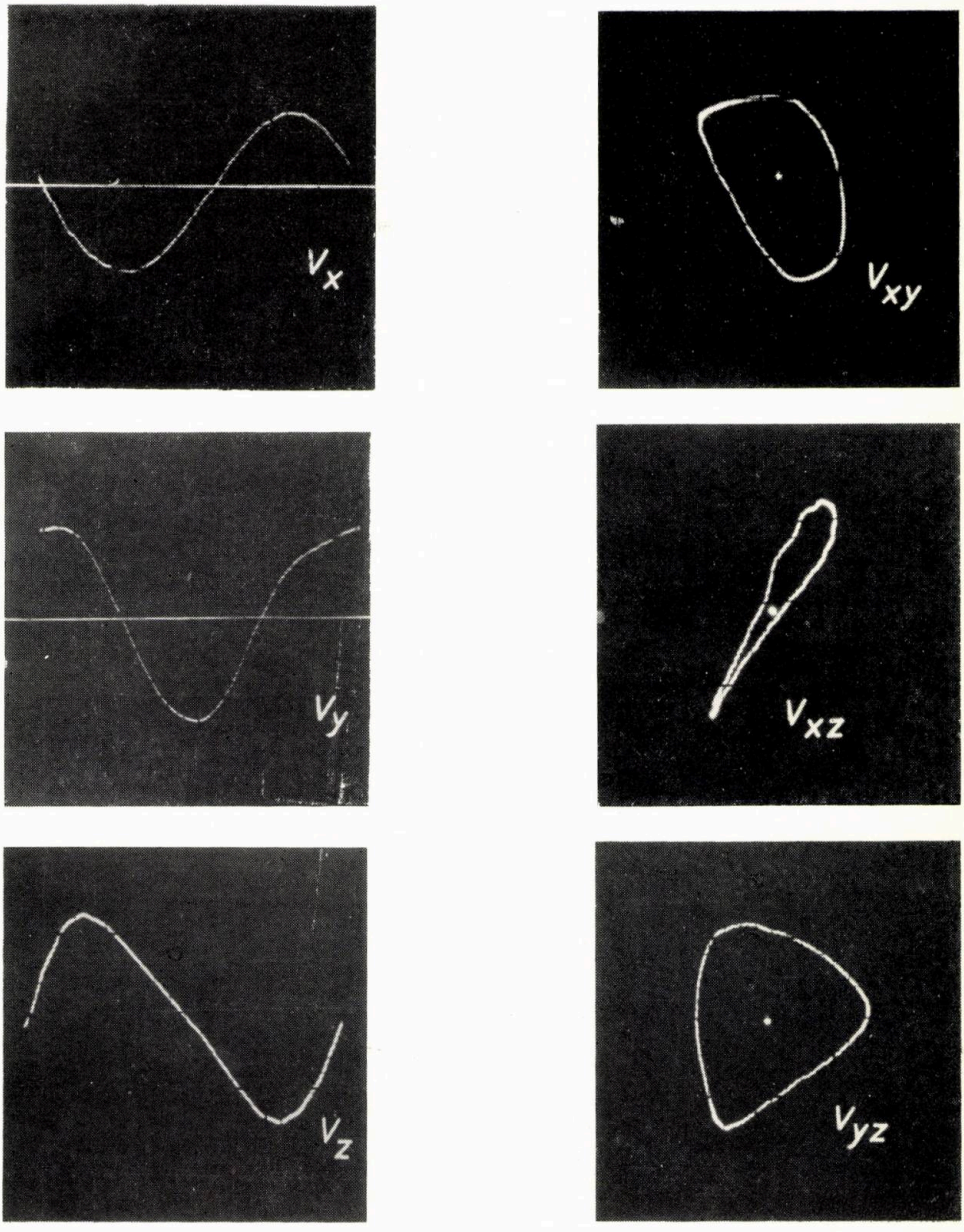


Fig. 7

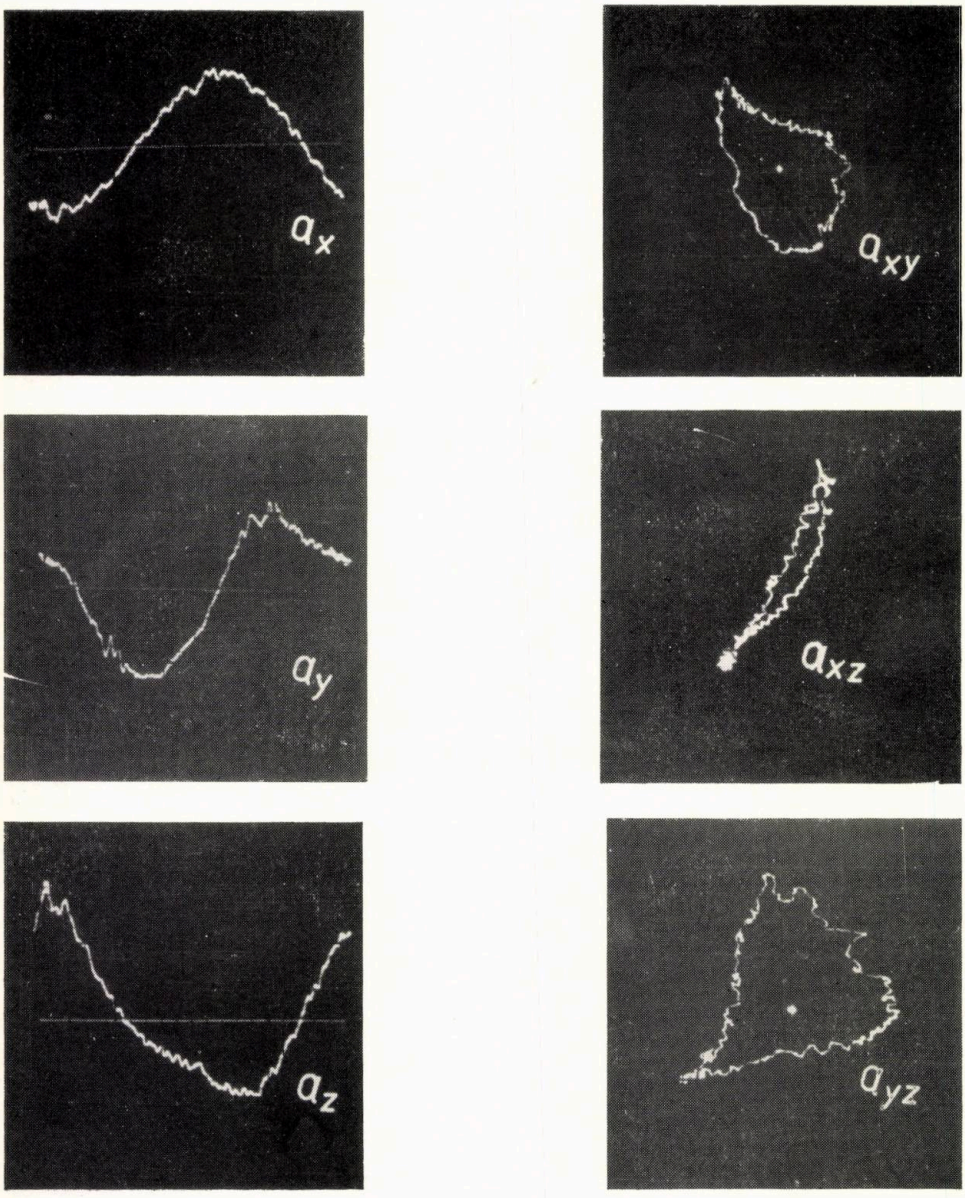


Fig. 8

3. Instalația prezentată mai sus este realizată în laboratorul de mecanisme al Institutului politehnic din Iași (fig. 5). Pentru a obține o rigiditate corespunzătoare și pentru a asigura poziția verticală a ghidajului zz, acesta este susținut de o diadă cu elemente foarte rigide, legată printr-o articulație exterioară de batiu (fig. 1).

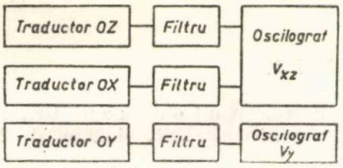


Fig. 3

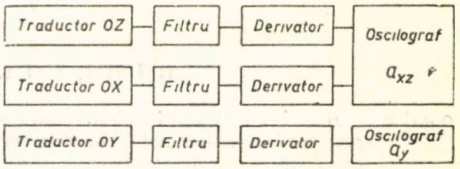


Fig. 4

Se apreciază că traductorul mecanoelectric triortogonal propus prezintă, în raport cu alte instalații similare, următoarele avantaje:

a) Construcția mecanică este relativ simplă și compactă, conținînd 3 elemete mobile, 3 cuple de translație și o cuplă sferică. La acestea se mai adaugă 2 elemente și 3 articulații, care formează diada de susținere a ghidajului zz. De remarcat că traductorul mecanoelectric polar spațial, propus în [3], are 10 elemente, 5 cuple de translație, 8 articulații și o cuplă sferică.

b) Tensiunile culese de traductoarele rezistive, după amplificare, detectare și filtrare, se introduc direct în osciloscop, fără a necesita operații de înmulțire electrică suplimentare, ca în cazul traductoarelor polare [1], [3].

c) Folosirea traductoarelor inductive de tip rotativ permite obținerea directă a diagramelor de viteze.

d) Este posibilă obținerea diagramelor de accelerații printr-o singură derivare electrică.

4. Cu ajutorul traductorului prezentat aici s-a studiat mișcarea unui punct P aparținînd bielei unui mecanism patrulater articulat spațial (fig.1), avînd axa manivelei perpendiculară pe planul xOy și axa balansierului perpendiculară pe planul yOz. Mecanismul are caracteristicile: $l_{AB} = 100$ mm, $l_{BC} = 520$ mm, $l_{DC} = 225$ mm, $x_A = 360$ mm, $z_D = 270$ mm, $x_C = 0$, $z_B = 0$, $y_A - y_D = 185$ mm. Punctul P se află la mijlocul segmentului BC, iar viteza unghiulară a manivelei este de 3 rad/sec. În fig. 6, 7 și 8 se prezintă oscilogramele corespunzătoare, obținute folosind scările: $k_t = 0{,}05$ s/mm, $k_l = 0{,}005$ m/mm, $k_v = 0{,}015$ m s^{-1}/mm, $k_a = 0{,}05$ m s^{-2}/mm. Originea de măsură a timpului s-a ales în momentul în care manivela AB era paralelă cu axa Ox și orientată în sensul ei pozitiv.

Instalația executată în laborator permite explorarea unor curbe situate într-un volum paralelipipedic de 600 ×600 ×300 mm. Eroarea relativă, datorată atît cauzelor de natură mecanică, precum și celor de natură

electrică [6], este de aproximativ 1%, acceptabilă pentru astfel de măsurători. Eroarea totală a aparaturii electrice și electronice anexe este de cca. 3%.

Primită la 15 noiembrie 1971

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de mecanisme și organe de mașini,
Laboratorul de teoria mecanismelor

BIBLIOGRAFIE

1. Bogdan R., Pelecudi Chr., Calmaciuc L., Antonescu Gr., *Asupra traductorului polar pentru cercetarea mecanismelor.* St. și cerc. de Mec. apl., Buc., X, *3* (1959).
2. Bogdan R., Pelecudi Chr., Calmaciuc L., Antonescu Gr., *Studiul vitezelor în mecanismele plane pe baze mecano-electronice.* St. și cerc. de Mec. apl., Buc., XIII, *4* (1962).
3. Bogdan R., Larionescu D., *Analiza armonică complexă și mecanoelectrică a mecanismelor plane.* Ed. Acad. R. S. R., Buc., 1968.
4. Munteanu Oct., Iliescu Gh., Drăgan C., Simionescu I., Duca C., *Considerațiuni asupra utilizării unui traductor de inducție, de tip rotativ, pentru înscrierea diagramelor de variație a vitezelor și accelerațiilor pe ecranul osciloscopului catodic.* Bul. Inst. polit. Iași, XVII(XXI), *1—2* (1971).
5. Munteanu Oct., Iliescu Gh., Duca C., Simionescu I., Drăgan C., *Studiul parametrilor mișcării de rotație în mecanismele plane prin metode mecanoelectrice.* St. și cerc. de Mec. apl. (sub tipar).
6. Simionescu I., Duca C., Munteanu Oct., Drăgan C., *Studiul parametrilor cinematici ai mecanismelor plane cu ajutorul unui traductor mecanoelectric ortogonal.* St. și cerc. de Mec. apl. (sub tipar).

TRADUCTEUR MÉCANO-ÉLECTRIQUE TRIORTHOGONAL POUR L'ÉTUDE CINÉMATIQUE DES MÉCANISMES DE L'ESPACE

(Résumé)

Les auteurs présentent un traducteur mécano-électrique de conception originale destiné à l'étude du mouvement d'un point dans l'espace. À l'aide de cette instalation on obtient sur l'écran de l'oscilloscope cathodique les diagrammes de variation en fonction du temps des projections des déplacements, des vitesses et des accélérations sur les axes d'un repère triorthogonal et les projections des trajectoires, de l'hodographe des vitesses et des accélérations sur les plans du même repère. Comme exemple, on considère le mouvement d'un point situé sur la bielle d'un mécanisme quadrilatère spatial.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. K. 620.17

DIE VERTEILUNG DER TORSIONSSPANNUNGEN IN DEN QUERSCHNITTEN DER GEWINDEBOHRER DURCH EIN ANALOGES NETZ [1])

VON

VICTOR BAUŞIC, D. HORBANIUC, IULIAN MIROŞ, COSTACHI GIRIADĂ, VALERIAN PALIHOVICI und DOREL LEON

Die Spannungsfunktion $U(x, y)$, die das Problem der Stabverdrehung irgendeines Querschnitts löst, wird durch die Gleichung des Poissontyps gegeben :

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = -2G\theta, \tag{1}$$

wo G — Drillungsmodul, θ — spezifiscer Verdrillungswinkel.

Die Randbedingungen sind $U = C$ und im Einzelfall $U = 0$.

Ein rechteckiges Stromnetz mit dem Schritt h und dem Widerstandswert r_0 in jeder Netzmasche bei welchem man in jeden Knoten einen Strom i_0 leitet, befriedigt die Gleichung :

$$\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{i_0 r_0}{h^2}. \tag{2}$$

Es ist ersichtlich, dass, wenn, wir $2G\theta$ mit $i_0 r_0/h^2$ ersetzen und die Konturbedingungen in unserem Fall $V = 0$ (auf dem Kontur) berücksichtigen, dann sind die Werte des elektrischen Potentials zahlenmässig den gesuchten Werten der Spannungsfunktion gleich.

Wird das Volumen $\mathcal{V}$ der Spannungsfunktion auf der ganzen Querschnittsfläche gerechnet :

---

[1]) Mittgeteilt an der wissenschaftlichen Tagung des Technisches Hochschule von Jassy, an 2—4 Juli 1970,

$$\mathcal{V} = \iint_A V(x,y)\,\mathrm{d}A \tag{3}$$

und die Flächenneigung der Spannungsfunktion (tg α) auf dem Querschnittskontur gemessen und wenn man weiss dass :

$$\tau = \operatorname{tg}\alpha, \qquad M_t = 2\mathcal{V} \quad \text{und} \quad w = \frac{M_t}{\tau}, \tag{4}$$

ergibt sich :

$$w = \frac{2\mathcal{V}}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{5}$$

Auf der Zeichnung wird aber tg α gemessen und also

$$\operatorname{tg}\alpha = S \operatorname{tg}\alpha_1, \tag{6}$$

wo S = der Zeichnungmassstab.

In unserem Fall wird die Formel des Widerstandsmomentes der Drillung

$$w = \frac{2\mathcal{V}_0 d^3}{14^3 \cdot 15 \operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{\mathcal{V}_0\,\mathrm{d}^3}{20580 \operatorname{tg}\alpha_1}, \tag{7}$$

wo : d — Durchmesser des Gewindebohrerkerns, $\mathcal{V}_0$ — Volumen zum Zeichnungsmassstab.

Die Berechnung des Widerstandsmoments der Drillung wurde für fünf Gewindebohrertype durchgeführt, die in Abb. 1...5 dargestellt sind, wonach die Niveaulinien in zwei rechteckige Richtungen auf der einen Hälfte gezeichnet wurden und auf der anderen Hälfte wurden die Spannungwerte und die Variation der Konturverdrehungspannungen gegeben. Letztere wurde auf ein Viertel gezeichnet, wegen der Symmetrie des Querschnitts.

So wurden die Formeln gewonnen :

a) für den Gewindebohrer in Abb. 1, $w = 0{,}194\ d^3$;
b) für den Gewindebohrer in Abb. 2, $w = 0{,}302\ d^3$;
c) für den Gewindebohrer in Abb. 3, $w = 0{,}155\ d^3$;
d) für den Gewindebohrer in Abb. 4, $w = 0{,}178\ d^3$;
e) für den Gewindebohrer in Abb. 5, $w = 0{,}362\ d^3$.

Schlusfolgerungen

1. Aus dem Vergleich der oben dargelegten Formeln zur Berechnung des Widerstandsmoments der Drillung wird festgesteltt, dass die Varianten *2* und *5* sich am günstigsten bei der Drillung verhalten.

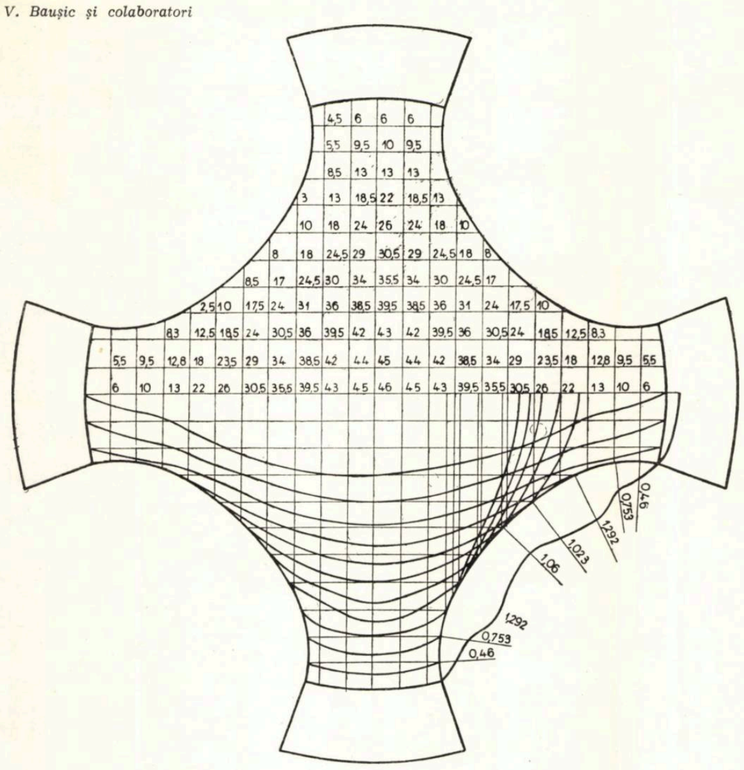


Fig. 1

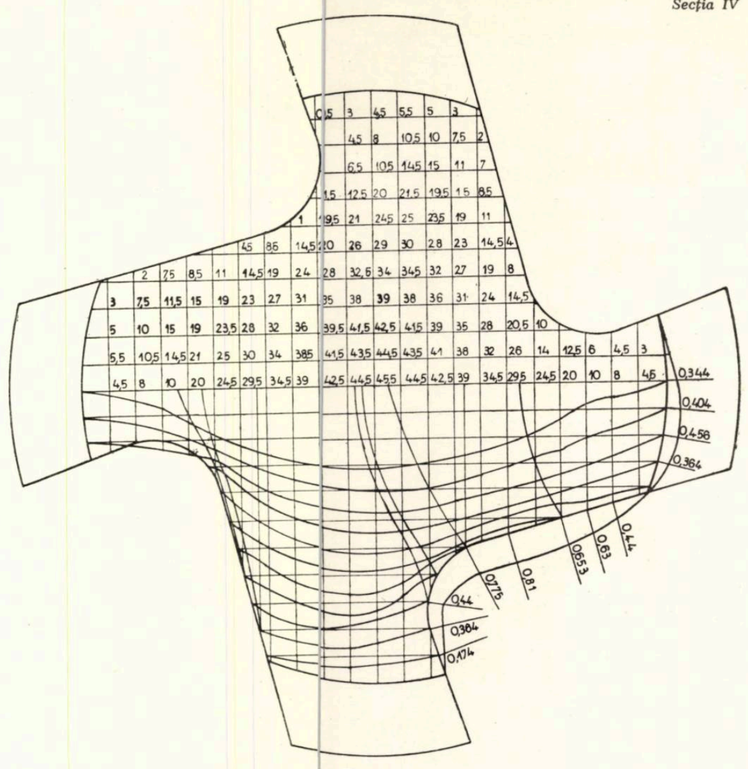


Fig. 2

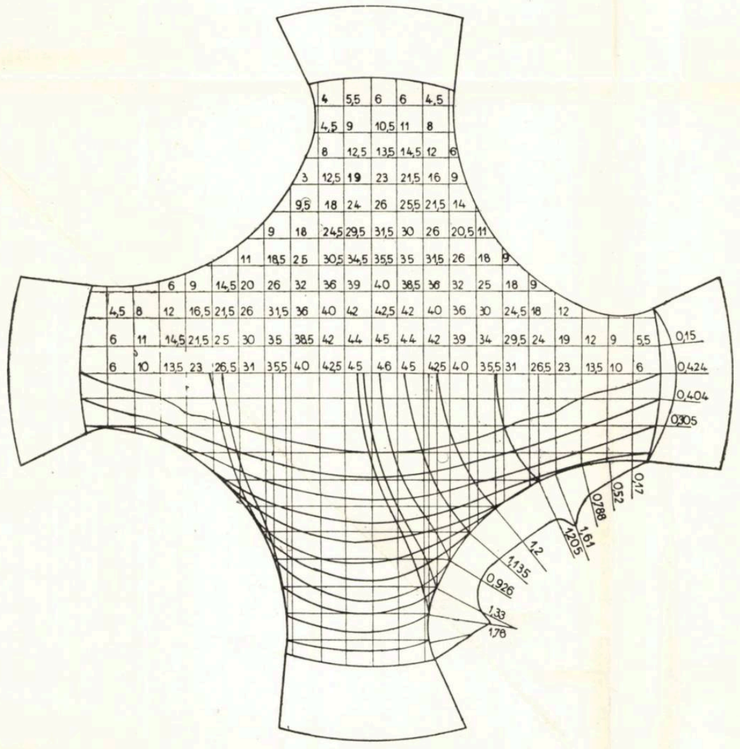


Fig. 3

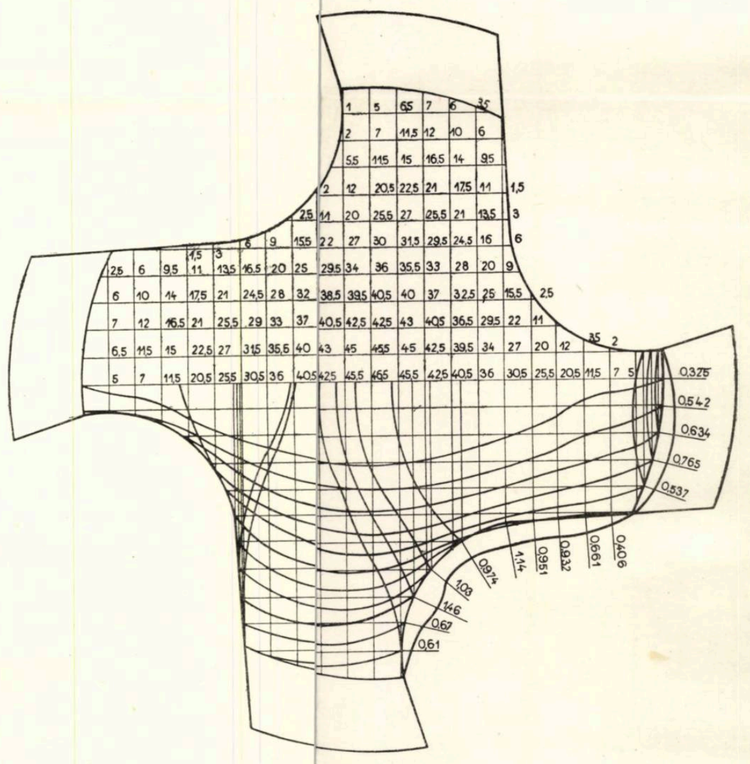


Fig. 4

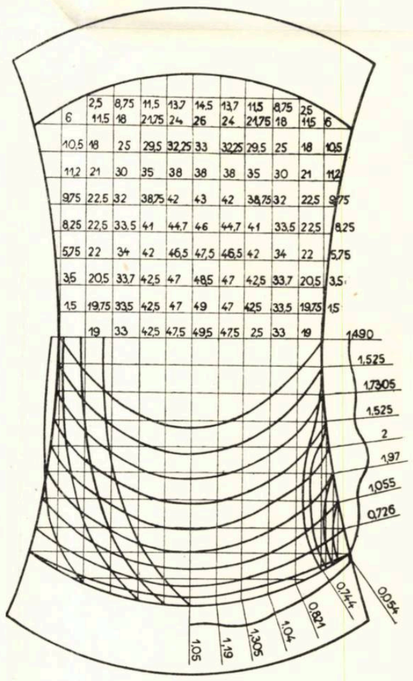


Fig. 5

2. Die Schaubilder der Variation der Konturverdrehungspannungen zeigen, dass deren Maximalwerte gegen die Flankenmitte auftreten, was durch das Verhalten bei der Drillung der Stäbe mit rechteckigem Querschnitt erklärlich ist.

Eingegangen am 22. März 1971

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Festigkeitslehre

LITERATURVERZEICHNIS

1. Walter J,. Karplus Ph. D., *Analog Simulation (Solution of Field Problems)*. New York, Toronto.
2. Bauşic V., Horbaniuc D., Miroş I., Giriadă C., Palihovici V., *Studiul repartiției eforturilor unitare tangențiale în secțiunea transversală a unui burghiu spiral, prin metoda analogiei electrice*. Comunicare prezentată la Conferința de Mecanică organizată de Academia R. S. R., București, 27—30 septembrie 1965.
3. Bauşic V., Horbaniuc D., Miroş I., Giriadă C., Palihovici V., *Studiul repartiției eforturilor unitare tangențiale la bare de secțiune în formă de segment de cerc supuse la răsucire, prin metoda analogiei electrice*. Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Institutului politehnic din Iași, din 28—30 septembrie 1967.
4. Тетельвоим И. М., *Электрическое моделирование*. М., 303 — 305, 1959.
5. Маиер цур Капеллен К., *Математические инструменты*. М., 103 — 174 и 277 — 278, 1950.
6. Беляев И. М., *Сопротивление материалов*. М., 212 — 213, 1950.
7. Барбашов Ф. А., *Исследованце динамических зависимостей при сверлении*. М., 85, 1963.

REPARTIȚIA EFORTURILOR UNITARE TANGENȚIALE ÎN SECȚIUNILE TAROZILOR SOLICITAȚI LA RĂSUCIRE, OBȚINUTĂ CU AJUTORUL UNEI REȚELE ANALOGICE

(Rezumat)

Folosind metoda analogiei electrice [2] se trasează variația tensiunilor tangențiale, provenite din răsucire, pe secțiunile a cinci tipuri de tarozi. Se discută comparativ și se arată tipurile de tarozi care se comportă mai avantajos la solicitarea de răsucire.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 621.882.1

CONTRIBUTIONS AU CALCUL DES ASSEMBLAGES À VIS PRÉCONTRAINTES À BASE DE RECHERCHES THÉORIQUES ET EXPÉRIMENTALES

Note II

ESSAIS EXPÉRIMENTAUX ET MÉTHODE DE CALCUL

PAR

N. G. POPINCEANU et E. N. DIACONESCU

I. Introduction

Dans la première partie de cet étude [1] on a déduit des relations fonctionnelles et de calcul pour les assemblages à vis précontraintes, en cas que l'un des éléments assemblés a un comportement rhéologique. Dans la présente Note on étudie par voie théorique et expérimentale la rigidité globale d'un système complex.

II. La rigidité globale des éléments assemblés

Du [1, § II] il résulte que pour déterminer les forces de l'assemblage il est nécessaire de connaître les rigidités des éléments assemblés aux divers moments (t ou τ) par rapport à l'application de la force de serrage initial ou de la force extérieure. On calcule ces rigidités à l'aide de la relation [1, (I.9)] si on connaît les longueurs l_{pi}, les aires moyennes A_{pi} et les modules de déformation E_{pi} au moment considéré ; parmi ces éléments, les longueurs l_{pi} (les épaisseurs des tôles) sont données initialement et donc sont connues.

En ce qui concerne les aires A_{pi}, comme il résulte du [1, § II], aucune des méthodes actuelles de calcul n'a pas une justification satisfaisante [3] et n'est pas assez générale et précise. On a montré [2], [3] théoriquement et expérimentalement que la distribution des contraintes de compression dans les éléments assemblés (à l'aide de laquelle on calcule les aires A_{pi}) a quelques caractéristiques importantes, comme il s'en suit :

a) la distribution des contraintes ne dépend pas des matériaux, des épaisseurs et du nombre des tôles assemblées ; elle est la même pour une certaine épaisseur totale l_p des éléments assemblés et pour une certaine vis,

b) dans le plan de séparation d'entre deux tôles il n'y a pas de discontinuités dans les champs des contraintes et des déformations.

c) pour des calculs pratiques on considère que les contraintes de compression sont distribuées au dedans des deux surfaces de révolution qui passent à travers les cercles extérieurs de contact entre l'écrou (du diamètre D_1) respectivement entre la tête de vis (du diamètre D_2) et le support ; ces deux surfaces se coupent dans un plan MN, perpendiculaire à l'axe de la vis (fig. 1) ; pour les vis standardisées $D_1 = D_2$ et donc le plan MN se trouve à la moitie de l'épaisseur l_p ;

d) ces surfaces de révolution peuvent être équivalées par des troncs de cône avec l'angle entre génératrice et axe $\alpha = 15° \ldots 16°$; en calcul on peut considérer $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}28$;

e) pour simplifier les relation de calcul, on remplace le tronc de cône de chaque élément par un cylindre équivalent.

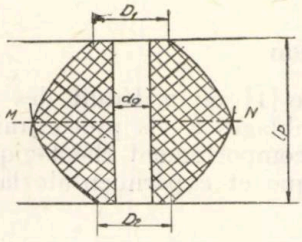


Fig. 1. — La distribution générale des contraintes dans les éléments assemblés.

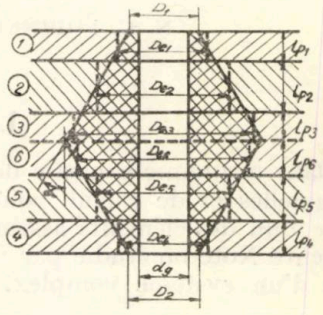


Fig. 2. — La distributions des contraintes dans les éléments assemblés : le schéma de calcul.

Dans ces conditions, pour établir les relations générales de calcul des aires A_{pi} pour un assemblage complexe (fig. 2) on procède ainsi :

1° on trace le cône des contraintes comme dans la fig. 2, avec $\alpha = 15° \ldots 16°$ ($\operatorname{tg} \alpha = 0{,}28$) ;

2° on trace le plan MN à la moitié de l'épaisseur totale l_p ; si le plan MN se trouve dans une tôle, on considère cette tôle composée d'autres deux tôles, séparées par le plan MN ;

3° on numérote les tôles assemblées dans l'ordre croissant de chaque bord de l'assemblage vers le centre, jusqu'au plan MN ;

4° on remplace les troncs de cône des tôles par des cylindres équivalents correspondants.

Les diamètres extérieurs de ces cylindres sont donnés par les relation générales suivantes :

a) pour les tôles extérieures :

$$D_{ek} = D_{1,2} + 0{,}28\, l_{pk}, \tag{II.1}$$

où k est l'indice des tôles extérieures et l_{pk} est leur épaisseur.

b) pour les tôles intérieures :

$$D_{ej} = 2\, D_{ej-1} - D_{ej-2} + 0{,}28\, l_{pj}, \tag{II.2}$$

j étant l'indice de la tôle considérée et l_{pj} son épaisseur;

Pour l'assemblage de la fig. 2, $k = 1$ et 4 et $j = 2$, 3, 5 et 6.

En connaissant les diamètres équivalents D_{ej}, D_{ek} on calcule les aires A_{pj}, A_{pk} par la relation :

$$A_{pj,k} = \frac{\pi}{4}(D^2_{ej,k} - d_g^2), \tag{II.3}$$

où les indices j, k ont la signification des indices i de la relation [1, (I.9)].

Pour les tôles métalliques, en qualité de modules de déformation, E_{pi}, on considère les modules d'élasticité donnés dans la littérature de spécialité ; pour les garnitures plastiques, en qualité de E_{pi} on considère, suivant les circonstances, le module d'élasticité instantannée E_e, le module d'élasticité retardée E_i ou le module global de déformation dans le régime stabilisé E_g, des matériaux considérés.

Les valeurs de calcul des modules E_e, E_i, E_g et de la constante n dans le cas que les déformations visqueuses des garnitures sont négligeables, ont été déterminées par les auteurs pour seize matériaux, à l'aide d'une méthode originale [2] et sont présentées dans le tableau 1.

On connaît ainsi tous les éléments de calcul pour la détermination correcte des rigidités c_p, c_{p0}, c_{pe}, c_{gi}, c_g qui interviennent dans les relations de calcul déduites dans [1, § II].

III. Le moment de torsion de la vis

On a montré dans [1, § I] que le moment M_s qui sollicite la vis pendant le fonctionnement et le moment M_{s0} de serrage initial ne sont pas égaux. Pour étudier l'évolution du moment M_{s0}, on a effectué en trois étapes quelques essais expérimentaux.

Dans une première étape, avec le dispositif présenté en fig. 3 *a*, on a déterminé par la méthode connue (pour une vis M 20) la variation du moment M_{s0} et du moment de frottement M_{p0} entre l'ecrou et son support, en fonction de la force axiale ; les résultats obtenus (fig. 4, courbes *1* et *2*) montrent que ces variations sont linéaires.

Tableau 1

Les éléments de calcul pour quelques matériaux de garnitures

Nr. crt.	Le matériau de la garniture	l_g mm	t_e minutes	$\frac{F_{0e}}{F_0}$	c_s MN/m	c_{pe} MN/m	c_g MN/m	A_g cm²	E_g MN/m²	n MN/m²	E_{ie} MN/m²	E_e MN/m²
1	Azbest	5,2	5,30	0,8800	700	356	432	7,04	3 190	0,269	15 050	4 050
2	Caoutchouc CAROM	4,1	4,33	0,772	716	126,2	134,5	6,97	793	0,401	2 770	1 110
3	Erka	2	4,66	0,830	748	475	616	6,79	1 820	0,552	5 130	2 830
4	Frenzelit	1	3,50	0,8945	764	723	1 117	6,73	1 660	0,460	5 260	2 420
5	Kautasit	2	4,25	0,8895	748	430	546	6,79	1 610	0,284	7 300	2 070
6	Paronit	2	2,30	0,860	748	688	1 038	6,79	3 060	0,681	7 600	5 180
7	Klinger	1	4,33	0,877	764	886	1 570	6,73	2 200	0,760	5 100	3 870
8	Klingerit I	3,5	7,66	0,806	725	517	693	6,90	3 510	0,801	7 900	6 320
9	Klingerit II	4,6	7,33	0,7943	710	514	686	7,00	4 500	0,912	9 450	8 610
10	Klingerit III	4	6,00	0,849	717	689	1 040	6,96	6 000	0,807	13 400	10 840
11	Teflon	2	3,66	0,9336	748	547	747	6,79	2 200	0,191	13 720	2 620
12	Polistiren	1,6	3,2	0,970	755	1 150	2 640	6,77	6 230	0,210	35 900	7 530
13	Triplex	1,3	4,5	0,830	760	840	1 428	6,76	2 740	1,543	4 510	6 960
14	Mucava	1,9	5	0,828	750	862	1 492	6,79	4 170	1,780	6 520	11 600
15	Presspan	0,5	1,2	0,965	772	925	1 690	6,68	1 260	0,164	8 930	1 465
16	Textolit	1,1	2	0,9920	763	961	1 820	6,73	297	0,0312	9 800	3 070

Dans une deuxième étape, à l'extrémité libre de la vis on a solidarisée une tige longue et légère, perpendiculaire à l'axe (fig. 3 *b*) ; en mesurant les déplacements tangentiels de l'extrémité de la tige avec un comparateur, on détermine l'angle φ de torsion de la vis et donc le moment de la vis. On constate qu'à la vissage, tant qu'on agit avec la clé, le moment de torsion M_{s0} croît avec la force axiale, comme dans la fig. 4, courbe *1*. Au moment de l'éloignement de la clé, le moment de torsion baisse brusquement à une valeur M'_{s0} (courbe *3*, fig. 4), plus petite que le moment de frottement M_{p0}. Il résulte que déjà avant l'application de la force extérieure, le moment de torsion de la vis n'est plus M_{s0}, mais $M'_{s0} < M_{s0}$.

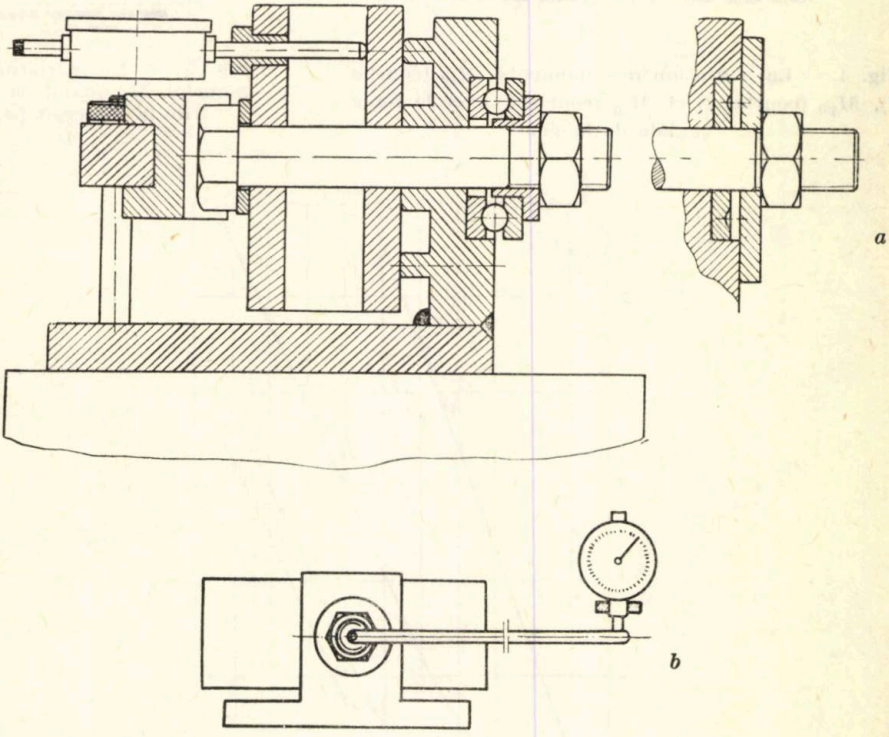


Fig. 3. — Le dispositif expérimental : *a*— original ; *b*—modifié.

Dans la troisième étape on a suivi l'influence de la charge extérieure sur le moment M_{s0} de la vis.

Quelques essais expérimentaux effectués en cas que la force extérieure charge supplémentairement la vis [4] ont montré que le moment de la vis M_s baisse quand la force de la vis croît (fig. 5). Pour étudier le changement du moment M_s quand la force de la vis baisse, on a introduit

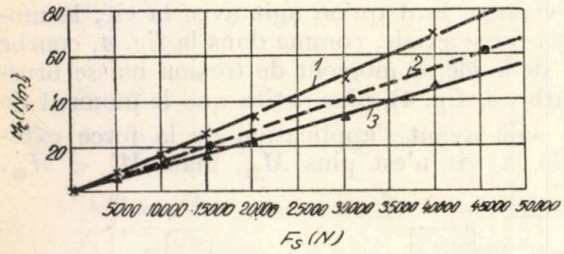


Fig. 4. — La variation des moments M_{s0} (courbe *1*), M_{p0} (courbe *2*) et M'_{s0} (courbe *3*) avec la force axiale de la vis.

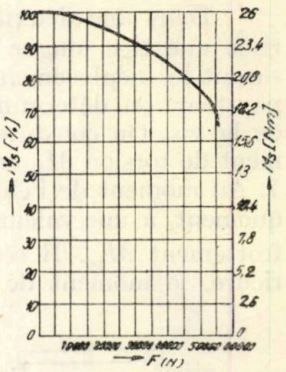


Fig. 5. — La variation du moment M_s quand la force de la vis croît [4].

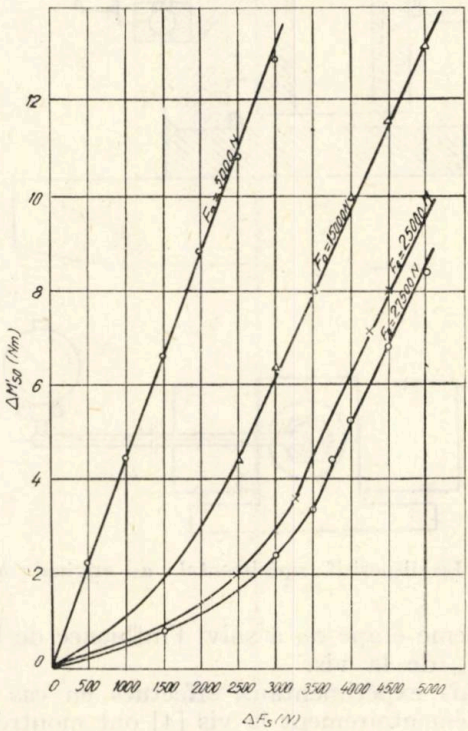


Fig. 6. — La croissance du moment M_s en fonction de l'abaissement de la force axiale.

dans l'assemblage de la fig. 3 *b* une garniture de caoutchouc. On constate que lorsque la force de la vis baisse avec ΔF_s, le moment M'_{s0} croît avec la valeur $\Delta M'_{s0}$, comme dans la fig. 6.

Il résulte que le moment de torsion de la vis n'est pas constant ; il change avec la force extérieure, à savoir il baisse quand la force extérieure croît et croît quand cette force baisse.

Cette variation du moment de la vis on peut l'expliquer par l'intervention simultanée des déformations élastiques sur la direction tangentielle des surfaces de contact et de l'effet actif de dévissage de la force axiale. Évidement, pour l'élucidation du phénomène sont encore nécessaires des recherches théoriques et expérimentales.

IV. Méthode de calcul des assemblages à vis précontraintes

Les données initiales pour le calcul des assemblages à vis précontraintes sont : la force rémanente minimum admissible F_{ra}, la force extérieure F, les dimensions et les matériaux des éléments de l'assemblage. Le calcul de l'assemblage réside en la détermination de la force de serrage initial F_0, du moment de la clé M_{c0}, de la force maximale dans la vis $F_{s\,max}$, du moment de torsion M_s et, enfin, la vérification à la résistance de la vis.

On détermine d'abord la force de serrage initial $F_0(t)$ au moment de l'application de la force extérieure F. Dans ce but on impose la condition que dans un intervalle de temps $\tau = T$, la force rémanente $F_r(\tau)$ soit plus grande que sa valeur admissible F_{ra} :

$$F_r(\tau) \geqslant F_r(T) = F_s(T) - F \geqslant F_{ra}. \tag{IV.1}$$

On calcule la force $F_s(T)$ avec les relations [1, (II.14)], [1, (II.15)] et [1, (II.19)] pour les garnitures avec un comportement rhéologique général, avec les relations [1, (II.20)] ou [1, (II.22)] et [1, (II.22′)] pour les garnitures sans déformations visqueuses, avec la relation [1, (II.27)] pour les garnitures sans déformations élastiques retardées et avec la relation [1, (I.2)] pour les assemblages métalliques sans garnitures plastiques. Il est à remarquer que dans le dernier cas la force $F_r(\tau)$ ne dépend pas du temps : $F_r(\tau) = F_r = \text{ct}$, et que dans le cas que la garniture n'a pas des déformations visqueuses, la force $F_r(\tau)$ se stabilise en temps à la valeur donnée par [1, (II.25)] ou [1, (II.25′)].

À l'aide de cette valeur de $F_0(t)$, on détermine par la suite la force de serrage F_0 au moment initial, en utilisant les relations suivants : [1, (II.8)], [1, (II.9)], [1, (II.10)], pour les garnitures avec un comportement rhéologique général, [1, (II.16] ou [1, (II.17)] ,...., [1, (II.17‴)], pour les garnitures sans déformations visqueuses, [1, (II.26)] pour les garnitures sans déformations élastiques retardées et [1, (II.30)], pour les assemblages sans garnitures rhéologiques.

Puis, avec les relations [1, (1.3)] et [1, (I.4)] on calcule les moments M_{c0} et M_{s0}.

La force maximale $F_{s\,max}$ est nécessaire pour la détermination de la contrainte de traction de la vis σ_s :

$$\sigma_s = \frac{F_{s\,max}}{A_s} = \frac{4F_{s\,max}}{\pi d_1^2}. \tag{IV.2}$$

Dans le cas d'une garniture avec un comportement rhéologique général ou rhéologique sans déformations élastiques retardées, il est possible que la force $F_s(\tau) \leqslant F_s(t)$ soit plus petite que la force de serrage initial F_0 ; en cette situation la force maximale $F_{s\,max}$ est la plus grande des forces F_0 et $F_s(t)$ (les relations [1, (II.14)] et [1, (II.27)]). Dans le cas ou la garniture n'a pas des déformations visqueuses ou a seulement des déformations élastiques instantannées, la force $F_{s\,max}$ est F_{se}, F_{set} ou F_s (les relations [1, (II.22′)], [1, (II.22)] ou [1, (II.1)].

Les rigidités qui interviennent dans ces relations, on les calcule par la méthode présentée dans le § II à la base des données de la littérature de spécialité ou présentées dans le tableau 1.

La contrainte de torsion τ_s on la calcule avec la valeur M_s du moment de torsion à l'instant quand la force de la vis est maximale :

$$\tau_s = \frac{M_s}{W_p} = \frac{16\,M_s}{\pi d_1^3}. \tag{IV.3}$$

Lorsque la sollicitation est statique, on vérifie la vis à la resistance avec la relation connue :

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_s^2 + 3\tau_s^2} \leqslant \sigma_a = \frac{\sigma_l}{c}. \tag{IV.4}$$

Puisque, ainsi comme il résulte du § **III** il n'est pas encore possible un calcul analytique du moment M_s, et parce que d'habitude $M_s < M_{so}$, pour le calcul on peut considérer que dans la relation (IV.4), τ_s est remplacé par τ_0 [1, (I.5)].

Dans le cas d'une force extérieure variable, la vis est soumise à la fatigue de traction et de torsion. À la base du présent travail il n'est pas possible de préciser la valeur maximum et minimum de la force F_s ; sont encore nécessaires des études concernant le comportement des assemblages avec des garnitures rhéologiques en régime dynamique. Pour un calcul qui couvre, on peut calculer la force maximum et minimum de la vis avec les relations de $F_s(\tau)$ [1, (II.14)], [1, (II.20)], [1, II.22)], [1, (II.22′)], [1, (II.27)] où l'on considère la valeur maximum et minimum de la force F. Aussi, il n'est pas possible de préciser la valeur maximum et minimum du M_s ; approximativement on peut considérer $M_s = \text{ct} = M_{s0}$.

Il résulte qu'ils sont encore nécessaires des recherches expérimentales pour la détermination des toutes les caractéristiques rhéologiques des matériaux de garnitures et des études théoriques et expérimentales concernant le comportement des assemblages en régime dynamique.

Reçue le 13 juin 1971

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mécanismes et
de Détails des Machines

BIBLIOGRAPHIE

1. Popinceanu N. G., Diaconescu E. N., *Contributios au calcul des assemblages à vis précontraintes à base de recherches théoriques et expérimentales* (I). Bul Inst. polit. Iaşi, XVII (XXI), *1—2*, s. IV, 69—85 (1971).
2. Popinceanu N., G. Diaconescu E. N., *Contribuţii privind comportarea garniturilor în îmbinările cu şuruburi.* Mase plastice (sous presse).
3. Popinceanu N., G., Diaconescu E. N., *Contribuţii privind repartiţia tensiunilor de compresiune la calculul rigidităţii pachetului la îmbinări cu şuruburi cu strîngere iniţială.* Constr. de maşini (sous presse).
4. Junker G., Strelow D., *Untersuchungen über die Mechanik des selbsttätigen Lösens und die Zweckmässige Sicherung von Schraubenverbindungen* (I), (II). Draht-Welt, **52**, *2*, 3 (1966).
5. Решетов Д. Н., *Ладораторные работы по курсу Детали машин.* Высшая школа, 1964.

CONTRIBUŢII LA CALCULUL ÎMBINĂRILOR CU ŞURUBURI CU STRÎNGERE INIŢIALĂ PE BAZĂ DE CERCETĂRI TEORETICE ŞI EXPERIMENTALE

II. Încercări experimentale şi metodă de calcul

(Rezumat)

Se prezintă mai întîi o metodă generală pentru calculul rigidităţii unui pachet complex, cu sau fără garnituri plastice. Pe bază de încercări experimentale se stabileşte că momentul de torsiune din şurub nu este constant, ci variază cu forţa exterioară. În încheiere se prezintă o metodă generală pentru calculul îmbinărilor cu şuruburi cu strîngere iniţială.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 621.8227.

CONTRIBUTION CONCERNANT LA DURABILITÉ DE VIE ET LE TAUX DYNAMIQUE DE BASE DES ROULEMENTS RADIAUX À MOUVEMENT OSCILLANT [1])

Note II

RELATION DE CALCUL DU TAUX DYNAMIQUE DE BASE POUR LE CAS PARTICULIER $\theta < \theta_{crt}$

PAR

L. T. HOSTIUC

1. Introduction

En ce qui suit on particularise les relations (1.19) et (1.25) de la première partie de ce travail [1], pour $\theta < \theta_{crt}$.

2. Relation de calcul du taux dynamique de base C_t pour $\theta < \theta_{crt}$

Dans ce cas le chargement sur tous les éléments du roulement est discontinue. On utilise les cotes intérieures conformément à la fig. 1.

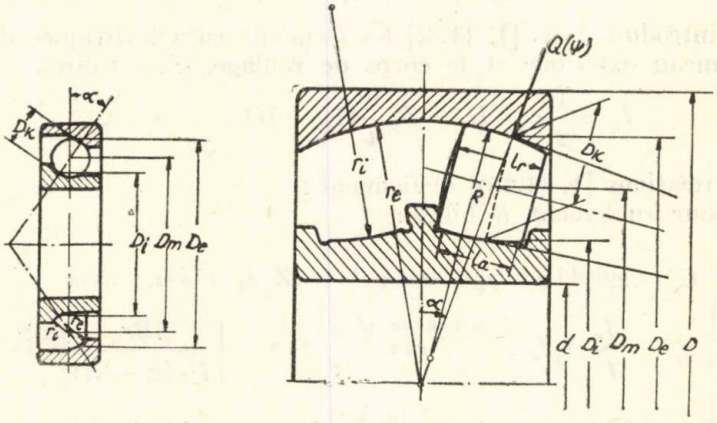


Fig. 1. — Cotes intérieures pour des roulements à contact initial ponctuel.

[1]) Présentée lors de la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, le 2—4 juillet 1970.

On introduit dans [1, (1.8)], qui donne les expressions Φ et Ψ, les éléments du contact entre l'anneau intérieur et le corps de roulage :

$$l_s = \frac{1}{2} Z_p \theta_i D_i = \frac{Z_p \theta}{4}(1+\gamma) D_i, \quad u = 2. \tag{2.1}$$

Ainsi [1, (1.23)] devient :

a) pour roulements à billes :

$$\begin{cases} C_i = g_1^{(i)} g_2^{(i)} g_3^{(i)} (Z_p \theta)^{-\frac{3}{c-h+2}} D_k^{1,8} Z i^{1-1/w} \cos\alpha, \quad \text{avec} \\ g_1^{(i)} = \dfrac{J_r}{J_m} A_1 f_0 \, 2^{-\frac{4c+2h+3e-10}{c-h+2}}, \quad g_2^{(i)} = \gamma_0^{\frac{3}{c-h+2}} \dfrac{(1-\gamma)^{\frac{2c+h-\varepsilon_0-5}{c-h+2}}}{(1+\gamma)^{\frac{3}{c-h+2}}}, \\ g_3^{(i)} = \left[\dfrac{2R\gamma_i}{D_k(\gamma_i - R)}\right]^{\frac{\varepsilon_0}{c-h+2}}, \end{cases} \tag{2.2}$$

f et ε_0 pouvant être déterminé [3];

b) pour roulements à rouleaux :

$$\begin{cases} C_i = g_1^{(i)} g_2^{(i)} i^{1-1/w} D_k^{1,07} Z l_r^{\frac{c-h-1}{c-h+1}} (Z_p \theta)^{-\frac{2}{c-h+1}} \cos\alpha, \quad \text{avec} \\ g_1^{(i)} = \dfrac{J_r}{J_m} B_1 \, 2^{-\frac{c+h+2e-5}{c-h+1}}, \quad g_2^{(i)} = \gamma_0^{\frac{2}{c-h+1}} \dfrac{(1-\gamma)^{\frac{c+h-3}{c-h+1}}}{(1+\gamma)^{\frac{2}{c-h+1}}}. \end{cases} \tag{2.3}$$

3. Relation de calcul du taux dynamique de base C_e pour $\theta < \theta_{cr\,i}$

On introduit dans [1, (1.8)] les éléments caractéristiques du contact entre l'anneau extérieur et le corps de roulage, c'est-à-dire :

$$l_s = \frac{1}{2} Z_p \theta_e D_e = Z_p \frac{\theta}{4}(1-\gamma) D_e, \qquad u = 2. \tag{3.1}$$

Les relations [1, (1.25)] deviennent :

a) pour roulement à billes :

$$\begin{cases} C_e = g_1^{(e)} g_2^{(e)} g_3^{(e)} D_k^{1,8} Z \cos\alpha \, i^{1-1/w} (Z_p \theta)^{-\frac{3}{c-h+2}}, \quad \text{avec} \\ g_1^{(e)} = \dfrac{J_r}{J_m} A_1 f_0 \, 2^{-\frac{4c+2h+3e-10}{c-h+2}}, \quad g_3^{(e)} = \left[\dfrac{2Rr_e}{D_k(r_e - R)}\right]^{\frac{\varepsilon_0}{c-h+2}}, \\ g_2^{(e)} = \gamma_0^{\frac{3}{c-h+2}} \dfrac{(1+\gamma)^{\frac{2c+h-\varepsilon_0-5}{c-h+2}}}{(1-\gamma)^{\frac{3}{c-h+2}}}; \end{cases} \tag{3.2}$$

b) pour roulements à rouleaux :

$$(3.3)\quad \begin{cases} C_e = g_1^{(e)}\, g_2^{(e)}\, i^{1-1/w}\, D_k^{1,07}\, Zl_r^{\frac{c-h-1}{c-h+1}}\, (Z_p\,\theta)^{-\frac{3}{c-h+1}} \cos\alpha, & \text{avec} \\ g_1^{(e} = \dfrac{J_r}{J_m} B_1, \qquad g_2^{(e)} = \gamma_0^{\frac{2}{c-h+1}} \dfrac{(1+\gamma)^{\frac{c+h-3}{c-h+1}}}{(1-\gamma)^{\frac{2}{c-h+1}}}. \end{cases}$$

4. Relation de calcul du taux dynamique de base C_k pour $\theta < \theta_{cri}$

Puisque, pour les roulements radiaux normalisés, l'angle critique d'oscillation du corps de roulage θ_{cri} est plus grand que l'angle critique d'oscillation de l'anneau intérieur, le chargement sur les corps de roulage est discontinu et il est formé de deux arcs de cercle égaux, $\widehat{A'C_e}$ — en contact avec l'anneau extérieur et $\widehat{B'C_i}$ — en contact avec l'anneau intérieur (fig. 2).

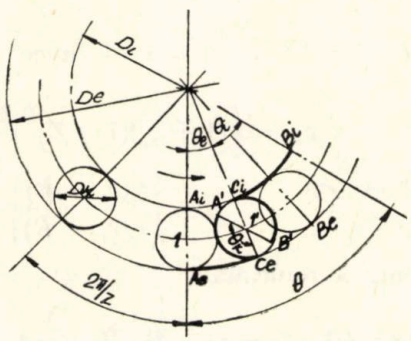


Fig. 2. — Les arcs de cercle parcourus par un corps de roulage en contact de roulement avec les deux anneaux quand $\theta < \theta_{cri}$.

L'apparition des fissures de fatigue dans le corps de roulage portant dans la portion $\widehat{A'C_e}$ est indépendante de l'apparition du même phénomène sous la portion $\widehat{B'C_i}$, donc il existe la relation :

$$(4.1)\qquad S_k = S_{ki}\, S_{ke},$$

où S_k est la probabilité de résistance à la fatigue de contact d'un corps de roulage en ensemble, S_{ki}, S_{ke} — la probabilité de résistance à la fatigue de contact d'un corps de roulage portant du contact avec l'anneau intérieur, respectivement avec l'anneau extérieur.

En passant aux taux dynamique de base, de (4.1) il en résulte

$$C_k = \left[1 + \left(\frac{C_{kt}}{C_{ke}}\right)^w\right]^{-1/w} C_{kt}. \tag{4.2}$$

Les taux dynamiques C_{kt} et C_{ke} peuvent être déterminé d'une manière analogue.

La relation (4.2) devient :

a) pour roulements à billes :

$$C_k = \left[1 + \left(\frac{C_t}{C_e}\right)^w\right]^{-1/w} C_t \left(\frac{1}{Z_p}\right)^{-\frac{3}{c-h+2}}; \tag{4.3}$$

b) pour roulements à rouleaux :

$$C_k = \left[1 + \left(\frac{C_t}{C_e}\right)^w\right]^{-1/w} C_t \left(\frac{1}{Z_p}\right)^{-\frac{2}{c-h+1}}. \tag{4.4}$$

Le taux dynamique de base C_{0s}, donnée par [1, (1.19)], devient après l'utilisation de (2.2), (2.3), (3.2), (3.3), (4.3) et (4.4) :

a) pour roulements à billes :

$$\begin{cases} C_{0s} = g_m g_{Z_p} D_k^{1,8} Zi^{1-1/w} \cos\alpha\, \theta^{-\frac{3}{c-h+2}}, \quad \text{avec} \\ g_m = g_1^{(t)} g_2^{(t)} g_3^{(t)}, \qquad g_{Z_p} = \left[(1+g_6)(1+Z_p^{\frac{c-h-3w+2}{c-h+2}})\right]^{-1/w} Z_p^{-\frac{3}{c-h+2}}, \\ g_4 = \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^{\frac{2c+h-\varepsilon_0-2}{c-h+2}}, \qquad g_5 = \left[\frac{r_i(r_e-R)}{r_e(r_i-R)}\right]^{\frac{\varepsilon_0}{c-h+2}}, \qquad g_6 = (g_4 g_5)^w; \end{cases} \tag{4.5}$$

b) pour roulements à rouleaux :

$$\begin{cases} C_{0s} = g_m g_{Z_p} D_k^{1,07} Zi^{1-1/w} \cos\alpha\, l_r^{\frac{c-h-1}{c-h+1}}\, \theta^{-\frac{2}{c-h+2}}, \quad \text{avec} \\ g_m = g_1^{(t)} g_2^{(t)}, \qquad g_{Z_p} = \left[(1+g_4^w)\left(1+Z_p^{\frac{c-h-2w+1}{c-h+1}}\right)\right]^{-1/w} Z_p^{-\frac{2}{c-h+2}}, \\ g_4 = \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^{\frac{c+h-1}{c-h+1}}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Pour simplifier les calculs, les relations (4.5) et (4.6) ont été inscrites dans le tableau 1.

Si on introduit dans [1, (1.13)] le taux dynamique de base C_{0s} calculé à l'aide de (4.5) et (4.6), on obtient la durabilité de vie du roulement en mouvement oscillant pour $\theta < \theta_{cri}$. D'une maniere analogue on peut aussi appliquer [1, (1.19)] aux trois autres cas possiblles d'oscillation de [1, (1.27)] et l'on obtient des tableaux de calcul analogues aux tableau 1.

Tableau 1

Calcul du taux dynamique de base C_{0s} dans le cas $\theta < \theta_{cri}$

Symbole	Roulements à billes	Roulements à rouleaux
C_{0s}	$g_m\, g_{Z_p}\, D_k^{1,8}\, Zi^{1-1/w} \cos\alpha\, \theta^{-\frac{3}{c-h+2}}$	$g_m g_{Z_p} D_k^{1,07} Zi^{1-1/w} \cos\alpha\, l_r^{\frac{c-h-1}{c-h+1}}\, \theta^{-\frac{2}{c-h+1}}$
g_m	$g_1^{(i)}\, g_2^{(i)}\, g_3^{(i)}$	$g_1^{(i)}\, g_2^{(i)}$
$g_1^{(i)}$	$\dfrac{J_r}{J_m} A_1 f_0\, 2^{-\frac{4c+2h+3e-10}{c-h+2}}$	$\dfrac{J_k}{J_m} B_1\, 2^{-\frac{c+h+2e-5}{c-h+1}}$
J_r	$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\psi_0}^{+\psi_0}\left[1-\frac{1}{2\varepsilon}(1-\cos\psi)\right]^{3/2}\cos\psi\, d\psi$	$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\psi_0}^{+\psi_0}\left[1-\frac{1}{2\varepsilon}(1-\cos\psi)\right]^{1,1}\cos\psi\, d\psi$
J_m	$\sqrt[w]{\dfrac{1}{2\psi_0}\displaystyle\int_{-\psi_0}^{+\psi_0}\left[1-\frac{1}{2\varepsilon}(1-\cos\psi)\right]^{3w/2} d\psi}$	$\sqrt[w]{\dfrac{1}{2\psi_0}\displaystyle\int_{-\psi_0}^{+\psi_0}\left[1-\frac{1}{2\varepsilon}(1-\cos\psi)\right]^{1,1w} d\psi}$
$g_2^{(i)}$	$\dfrac{\gamma_0^{\frac{3}{c-h+2}}(1-\gamma)^{\frac{2c+h-\varepsilon_0-5}{c-h+2}}}{(1+\gamma)^{\frac{3}{c-h+2}}}$	$\dfrac{\gamma_0^{\frac{2}{c-h+1}}(1-\gamma)^{\frac{c+h-3}{c-h+1}}}{(1+\gamma)^{\frac{2}{c-h+1}}}$
γ_0	$\dfrac{D_k}{D_m}$	
γ	$\gamma_0 \cos\alpha$	
$g_3^{(i)}$	$\left(\dfrac{2r_i}{2r_i - D_k}\right)^{\frac{\varepsilon_0}{c-h+2}}$	
g_{Z_p}	$\left[(1+g_6)(1+Z_p^{\frac{c-h-3w+2}{c-h+2}})\right]^{-1/w} Z_p^{-\frac{3}{c-h+2}}$	$\left[(1+g_4)(1+Z_p^{\frac{c-h-2w+1}{s-h+1}})\right]^{-1/w} Z_p^{-\frac{2}{c-h+1}}$

Tableau 1 (suite)

Symbole	Roulementt à billes	Roulements à rouleaux
g_6	$(g_4\, g_5)^w$	
g_5	$\left[\frac{r_i(2r_e - D_k)}{r_e(2r_i - D_k)}\right]^{\frac{\varepsilon_0}{c-h+2}}$	
g_4	$\left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^{\frac{2c+h-\varepsilon_0-2}{c-h+2}}$	$\left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^{\frac{c+h-1}{c-h+1}}$
f_0, ε_0	déterminés graphiquement [3]	
c, h, e, A_1, B_1	déterminés par des essais	
Z_p	$\frac{\psi_0 Z}{\pi}$	
ψ_0	conformément à [7]	

Les exposants c, h, e de [1, (1.1)] se déterminent comme pour les roulements à mouvement de rotation [3], par des essais sur des roulements à billes et à rouleaux à mouvement oscillatoire.

La relation du taux dynamiques de base [1, (1.19)] est valable dans l'hypothèse que l'on néglige le glissement. Si l'accélération du mouvement d'oscillation est grande, de sort que l'angle φ [2] est égal à zéro, la cage a un mouvement de glissement par rapport à l'anneau extérieur en portant tour à tour les corps de roulage dans la zone chargée du roulement. Dans ce cas on considère que dans [1, (1.19)], $Z_p = Z$.

5. Conclusions générales

1. La méthode de calcul proposée tient compte des particularités qui ne peuvent être reproduites dans un mouvement de rotation fictive, comme par exemple : le nombre des corps de roulage portants $Z_p < Z$ et le chargement discontinu sur les gorges de roulement et sur les corps de roulage pour certaines valeurs de l'angle d'oscillation. La méthode proposée utilise les hypothèses statistiques de W e i b u l l et L u n d b e r g vérifiées par des essais.

2. Par rapport aux méthods de calcul existentes, la méthode proposée ne réclame pas le calcul d'une charge dynamique équivalente, mais

propose pour le calcul de la durabilité de vie des roulements radiaux à mouvement oscillant une relation analogue à celle des catalogues de roulements [1, (1.13)], où le taux dynamique de base est calculée à l'aide de (4.5) et (4.6).

3. On souligne la nécessité d'effectuer des essais pour déterminer les exposants c, e, h de [1, (1.1)].

Reçue le 18 juillet 1970

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mécanismes et de
Détails des Machines

BIBLIOGRAPHIE

1. Hostiuc L. T., *Contributions concernant la durabilité de vie et le taux dynamique de base des roulements radiaux à mouvement oscillant.*(I) *Relation générale de calcul de la durabilité de vie et du taux dymanique de base.* Bul. Inst. polit. Iași, **XVII (XXI)**, *3—4*, s. IV, 87—93 (1971).
2. Popinceanu N., Hostiuc L. T., *Particularités du comportement des roulements à mouvement oscillant.* Bul. Inst. polit. Iași, **XVII (XXI)**, *1—2*, s. IV (1971).
3. Lundberg G., Palmgren A., *Dynamic Capacity of Rolling Bearings.* Acta Polytechnica, Stokholm, Mech. Eng.. ser 1, **3**, 7 (1947).
4. Lundberg G., Palmgren A., *Dynamic Capacity of Roller Bearings.* Acta Polytechnica, Stockholm, Mech. Eng., ser. 2, **4**, 96 (1952).
5. Rumbarger J. H., Jones A. B., *Dynamic Capacity of Oscillating Rolling Element Bearings.* J. of Lubrications Techn., ASME, **90**, F (January 1968).
6. Harris T. A., *Rolling Bearing Analysis.* John Wiley & Sons, Inc., New York (1966).

CONTRIBUȚII PRIVIND DURABILITATEA ȘI CAPACITATEA DINAMICĂ DE BAZĂ A RULMENȚILOR RADIALI CU MIȘCARE DE OSCILAȚIE

Nota II

Relația de calcul a capacității dinamice de bază pentru cazul particular $\theta < \theta_{cri}$

(Rezumat)

Se particularizează relația generală de calcul a capacității dinamice de bază a rulmenților cu mișcare de oscilație, propusă în [1, (1. 19)], pentru rulmenții radiali ce oscilează cu un unghi $\theta < \theta_{cri}$, cazul cel mai des întîlnit în practica industrială.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.6.01

SUR LE MOUVEMENT DES FLUIDES VISQUEUX INCOMPRESSIBLES PAR DES INTERSTICES ANNULAIRES À PAROIS EN MOUVEMENT RELATIF ALTERNATIF DE TRANSLATION [1])

PAR

C. CIOBANU, LEONID CIOCAN et M. RĂDULESCU

1. Introduction

Le débit de fuite reste toujours le problème de première importance pour des nombreux domaines de la technique moderne. Les études présentés ici, sont une continuation des autres antérieures [1], concernant les interstices annulaires à parois immobiles.

Dans la première partie de ce travail, on expose sous forme analytique le problème général et puis, dans la deuxième, on considère le cas particulier du cylindre-piston, suivi des données concernant nos études expérimentales dans le but de confrontation avec les résultats obtenus par la voie théorique.

2. Étude analitique

2.1. Aspect général

Soit un fluide visqueux incompressible, en mouvement stationnaire-laminaire, par des interstices annulaires très étroits, comprises entre un cylindre immobile de rayon R_e et un piston mobile de rayon R_i, en mouvement alternatif axial de vitesse $V = V(t)$.

En y considérant les forces massiques négligeables et le courant de fluide axial symétrique (parce que pour le cylindre $V_r = V_\theta = 0$), les équations Navier-Stokes s'écrivent sous la forme suivante :

[1]) Les premiers resultats ont été communiqués lors de la Session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, le 2–4 juillet 1970.

$$(1)\qquad \begin{cases} -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial r}=0, \qquad -\dfrac{1}{\rho r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta}=0, \\ \dfrac{\partial V_z}{\partial t}=\nu\left(\dfrac{\partial^2 V_z}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_z}{\partial r}\right)-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

et l'équation de continuité

$$(2)\qquad \frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0,$$

se réduit a l'expression :

$$(3)\qquad \frac{\partial V_z}{\partial z}=0.$$

Les deux premières équations du système (1), montrent que la pression est indépendante de r et θ, et la dernière, que p ne dépend que du temps, parce que :

$$-\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{p_1-p_2}{l}=\frac{p(t)}{l}\ ;$$

$p_1 - p_2$ est la chute de pression correspondant à la longueur l du piston (son variation en fonction de t est donné dans la fig. 1) ; $t = 0$ indique

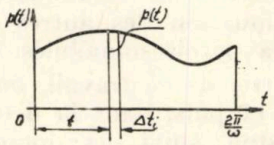


Fig. 1

le moment où le piston commence à se déplacer vers la gauche (fig. 2) avec la vitesse $V = V(t)$ (fig. 3).

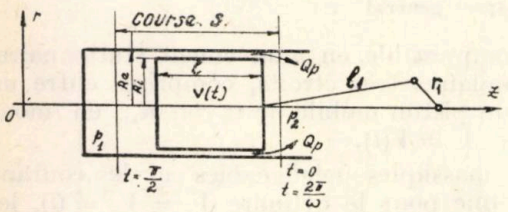


Fig. 2

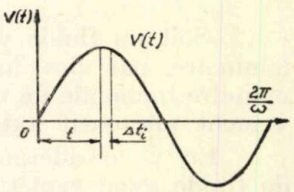


Fig. 3

On considère, pour simplifier, que dans un intervalle suffisamment petit Δt_i — à un moment quelconque t — le mouvement est stationnaire,

c'est-à-dire que pour la durée Δt_i, la vitesse du piston $V(t)$ et la pression $p(t)$ peuvent être considérées constantes. Dans les hypothèses faites, le mouvement nonstationnaire décrit par l'équation (1), résulte de la somme des mouvements stationnairs effectués dans les intervalles Δt_i.

Les valeurs de la pression et de la vitesse, pour chaque Δt_i, sont connues (fig. 2 et fig. 3). Dans ces conditions, pour des intervalles trés petits Δt_i, l'équation (1) s'écrit :

$$\frac{p(t)}{l} + \eta\left(\frac{d^2V_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV_z}{dr}\right) = 0 \tag{4}$$

et a la solution :

$$V_z = \frac{1}{4\eta}\frac{p(t)}{l}r^2 + C_1 \ln r + C_2. \tag{5}$$

Tout en tenant compte des conditions aux limites :

$$\begin{cases} r = R_i, & V_z = -V(t); \\ r = R_e, & V_z = 0, \end{cases} \tag{6}$$

on obtient :

$$\begin{cases} -V(t) = \dfrac{1}{4\eta}\dfrac{p(t)}{l}R_i^2 + C_1 \ln R_i + C_2, \\ 0 = \dfrac{1}{4\eta}\dfrac{p(t)}{l}R_e^2 + C_1 \ln R_e + C_2, \end{cases}$$

d'où il en résulte :

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{-\dfrac{1}{4\eta}\dfrac{p(t)}{l}(R_e^2 - R_i^2) + V(t)}{\ln (R_e/R_i)}, \\ C_2 = \dfrac{\dfrac{1}{4\eta}\dfrac{p(t)}{l}(R_e^2 \ln R_i - R_i^2 \ln R_e) - V(t) \ln R_e}{\ln (R_e/R_i)}. \end{cases}$$

L'équation (5) nous donne maintenant l'expression de la vitesse :

$$V_z = -\frac{1}{4\eta \ln (R_e/R_i)}\frac{p(t)}{l}\left[(R_e^2 - R_i^2)\ln\frac{r}{R_i} - (r^2 - R_i^2)\ln\frac{R_e}{R_i}\right] - V(t)\frac{\ln (R_e/r)}{\ln (R_e/R_i)}. \tag{7}$$

Le débit de fuite, pour l'intervalle Δt_i, est :

$$Q(t) = \int_{R_i}^{R_e} 2\pi r V_z \mathrm{d}r = \frac{\pi p(t)}{8\eta l}(R_e^2 - R_i^2) \times$$

$$\times \left(R_e^2 + R_i^2 - \frac{R_e^2 - R_i^2}{\ln (R_e/R_i)} \right) - \pi V(t) \left(\frac{R_e^2 - R_i^2}{2 \ln (R_e/R_i)} - R_i^2 \right). \tag{8}$$

Tout en tenant compte du fait que l'on a : $R_e = D/2 + e/2$, $R_i = D/2 + e/2$ (fig. 4), où e est le jeu radial, après le développement en série de puissances on obtient :

$$\ln \frac{R_e}{R_i} = 2 \left[\frac{R_e - R_i}{R_e + R_i} + \frac{1}{3} \left(\frac{R_e - R_i}{R_e + R_i} \right)^3 + \ldots \right] = 2 \left[\frac{e}{D} + \frac{1}{3} \left(\frac{e}{D} \right)^3 + \ldots \right].$$

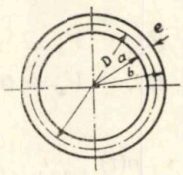


Fig. 4

Si l'on retient seulement les deux premiéres termes, on a

$$Q(t) = \frac{\pi p(t)}{12\,\eta l} De^3 - \frac{1}{2} \pi V(t) De. \tag{9}$$

Les représentations graphiques sont données dans la fig. 5, pour

$$\frac{p(t)}{V(t)} > \frac{6\eta l}{e^2}, \quad 0 < t < \frac{2\pi}{\omega},$$

et dans la fig. 6, pour :

$$\frac{p(t)}{V(t)} < \frac{6\eta l}{e^2}, \quad t_1 < t < t_2;$$

$$\frac{p(t)}{V(t)} > \frac{6\eta l}{e^2}, \quad 0 < t < t_1, \quad t_2 < t < \frac{2\pi}{\omega}.$$

On obtient pour les valeurs dans les instants t_1 et t_2 :

$$\frac{p(t)}{V(t)} = \frac{6\eta l}{e^2}. \tag{10}$$

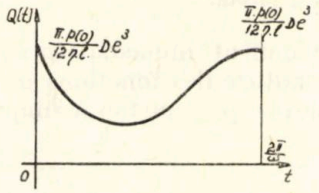


Fig. 5

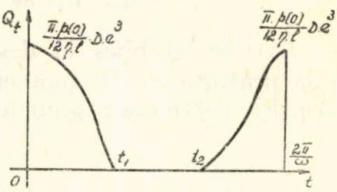


Fig. 6

Le débit de fuite Q_p qui correspond au cas où l'on a $Q(t)=f(t)$ (fig. 5) est donné par :

$$Q_p = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} Q(t)\mathrm{d}t = \frac{\omega}{2\pi}\frac{\pi De^3}{12\eta l}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} p(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\pi De\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} V(t)\,\mathrm{d}t. \tag{11}$$

Parce que (v. fig. 6) $Q_p = 0$ dans l'intervalle (t_1, t_2), on a l'expression :

$$Q_p = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{t_1} Q(t)\mathrm{d}t + \frac{\omega}{2\pi}\int_{t_2}^{\frac{2\pi}{\omega}} Q(t)\mathrm{d}t. \tag{12}$$

Remarques. 1. Une fois que V_z est connue, on peut aisément déterminer la tension tangentielle de viscosité par :

$$\tau_{rz} = \eta\frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{4\ln(R_e/R_i)}\frac{p(t)}{l}\left[\frac{R_e^2 - R_i^2}{r} - 2r\ln\frac{R_e}{R_i}\right] + \\ + V(t)\,\eta\frac{1}{r\ln(R_e/R_i)}. \tag{13}$$

En développant en série de puissance $\ln(R_e/R_i)$, on obtient :

$$\tau_{rz}\Big|_{r=R_i} = -\frac{1}{2}\frac{p(t)}{l}e + \eta\frac{V(t)}{e}. \tag{14}$$

2. Dès équations (9) et (14), ou voit que le premier terme représent l'écoulement de type Poiseuille-Hagen (à parois immobiles) et le deuxième, de type Couette pour un interstice développé, de largueur πD.

2.2. Cas de la pompe à piston

Les relations établies ci dessus, deviennent immédiatement utilisables dans la pratique dès le moment où la nature des fonctions $p(t)$ et $V(t)$ est précisée. En particulier, pour le système pompe à piston à simple action on a :

$$(15)\quad \begin{cases} p(t) = \Delta p = \text{const.}, \text{ pour l'intervalle : } t = \left[2n\dfrac{\pi}{\omega} \ldots (2n+1)\dfrac{\pi}{\omega}\right]; \\ p(t) = 0, \text{ pour l'intervalle } \quad t = \left[(2n+1)\dfrac{\pi}{\omega} \ldots (2n+2)\dfrac{\pi}{\omega}\right], \end{cases}$$

($n = 0, 1, 2, \ldots$) (fig. 7). Les variations de la pression à la fermeture et à l'ouverture des soupapes d'aspiration et de refoulement, ont été négligées.

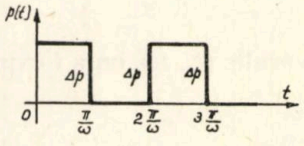


Fig. 7

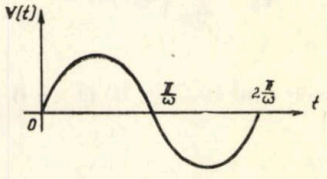


Fig. 8

Débit de fuite. Si la pompe est actionné à l'aide d'un vilebroquin, à vitesse angulaire $\omega = \text{const}$, on a la vitesse du piston

$$(16)\qquad V(t) = r_1\,\omega \sin \omega t$$

(fig. 8) ; l'équation (9) devient dans ces conditions

$$(17)\qquad Q(t) = \frac{\pi \Delta p}{12\eta l} De^3 - \frac{1}{2}\pi r_1 \omega\, De \sin \omega t,$$

où l'on a :

$$(17')\qquad Q(t) = \frac{\pi De\, r_1 \omega}{2}(K - \sin \omega t)$$

et

$$(18)\qquad K = \frac{\Delta p\, e^2}{6\eta l r_1 \omega},$$

r_1 étant le rayon de la manivelle.

Les fig. 9, 10, 11, représentent la fonction $Q(t) = f(t)$ respectivement pour les valeurs de $K \lessgtr 1$.

Puisque $\Delta p = 0$ dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{\omega} \ldots \frac{2\pi}{\omega}\right]$, il en résulte que le débit s'annulle lui aussi. Le point t_1, correspondant à $Q(t) = 0$ (v. (17)), est donné par :

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\Delta p\, e^2}{6\eta\, l\, r_1 \omega}. \tag{19}$$

Le débit de fuite Q_P pour une course $\left[0 \ldots \frac{2\pi}{\omega}\right]$, est obtenu de l'équation (17), pour chaque cas considéré.

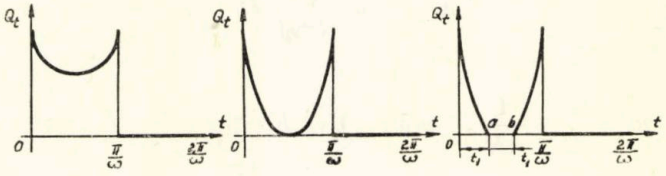


Fig. 9 Fig. 10 Fig 11

À savoir pour les cas représentés dans les fig. 9, 11, on a respectivement :

$$\begin{cases} Q_{p_1} = \dfrac{\omega}{2\pi} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} Q(t)\, \mathrm{d}t = \dfrac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \left(\dfrac{\pi \Delta p}{12\eta l} De^3 - \dfrac{1}{2} \pi\, r_1 De \omega \sin \omega t\right) \mathrm{d}t = \\ \qquad = \dfrac{\pi \Delta p}{24 \eta l} De^3 - \dfrac{r_1}{2} De\, \omega, \\ Q_{p_2} = \dfrac{\omega}{2\pi}\ 2 \displaystyle\int_0^{t_1} \left(\dfrac{\pi \Delta p}{12\eta l} De^3 - \dfrac{1}{2} \pi r_1 \omega De \sin \omega t\right) \mathrm{d}t = \\ \quad = \dfrac{\omega}{\pi} \left[\dfrac{\pi \Delta p}{12\, \eta\, l} De^3\, t_1 - \dfrac{1}{2} \pi r_1\, De\, (1 - \cos \omega t_1)\right]. \end{cases} \tag{20}$$

De l'équation (19) on obtient :

$$Q_{p_2} = \frac{\Delta p}{12\eta l} De^3 \arcsin \frac{\Delta p\, e^2}{6\eta l\, r_1 \omega} - \frac{1}{2} \omega\, r_1 De \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta p\, e^2}{6\eta l\, r_1 \omega}\right)^2}\right]. \tag{21}$$

En tenant compte des valeurs de K (18) et de

(22) $$Q_0 = \frac{r_1}{4} De\,\omega,$$

on peut remplacer (20) et (21) par une seule équation :

(23) $$Q_p = mQ_0,$$

où :

$$\begin{cases} m = \pi K - 2, & \text{pour } 1 \leqslant K < \infty, \\ m = 2K \arcsin K - 2(1 - \sqrt{1 - K^2}), & \text{pour } 0 < K \leqslant 1. \end{cases}$$

Les relations ci-dessus pour Q_p, peuvent s'écrire aussi sous la forme

(24) $$Q_p = m' \frac{\pi \Delta p}{12 \eta l} De^3,$$

où l'on a :

$$\begin{cases} m' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\pi K}, & \text{pour } 1 \leqslant K < \infty, \\ m' = \dfrac{\arcsin K}{\pi} - \dfrac{1 - \sqrt{1 - K^2}}{\pi K}, & \text{pour } 0 < K \leqslant 1. \end{cases}$$

C'est-à-dire, on obtient une rélation Poiseuille-Hagen pour le mouvement stationnaire, affectée du coeficient m', qui implique, à un moment donné, l'effet du mouvement nonstationnaire-alternante de type Couette.

La fig. 12 permet d'écrire pour le piston à simple action :

(25) $$Q_p \leqslant \frac{1}{2} Q_{Hp}.$$

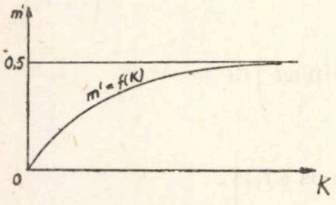


Fig. 12

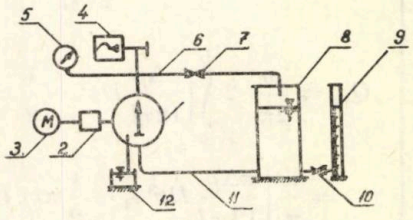
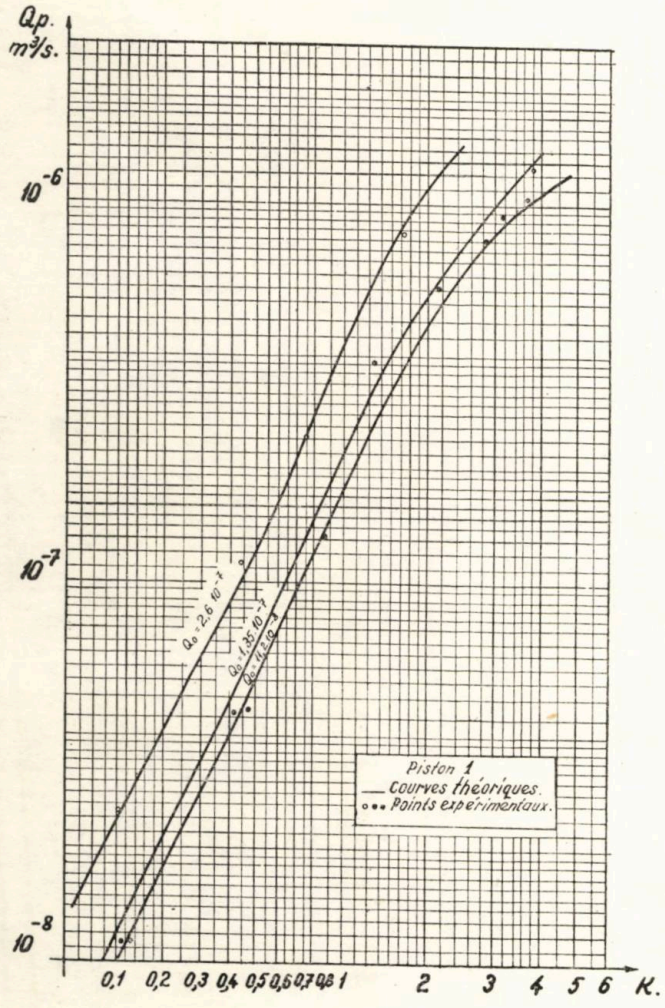


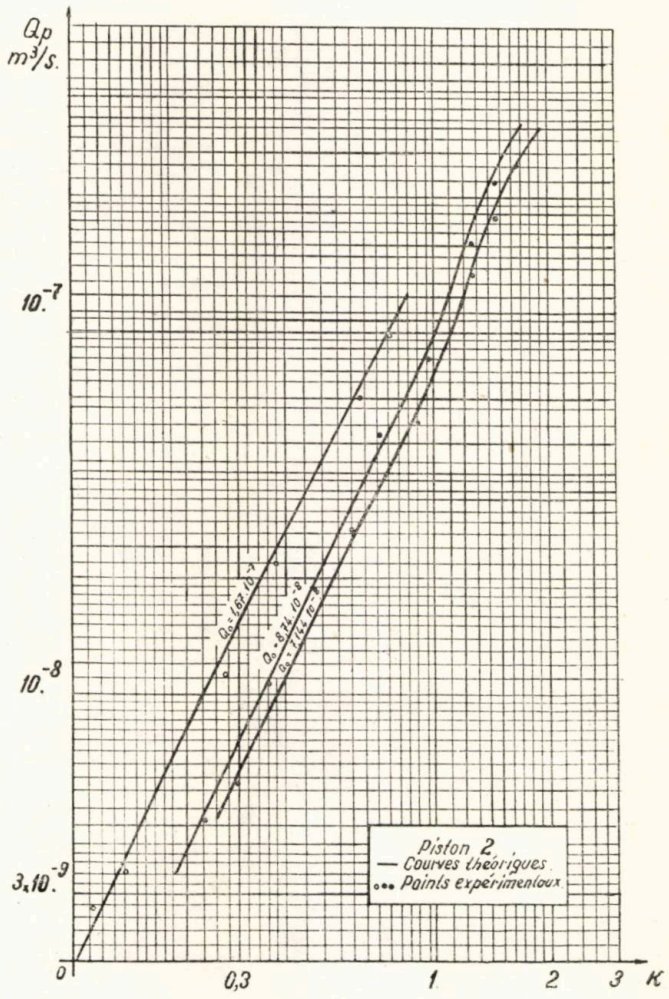
Fig. 13

3. Études expérimentales

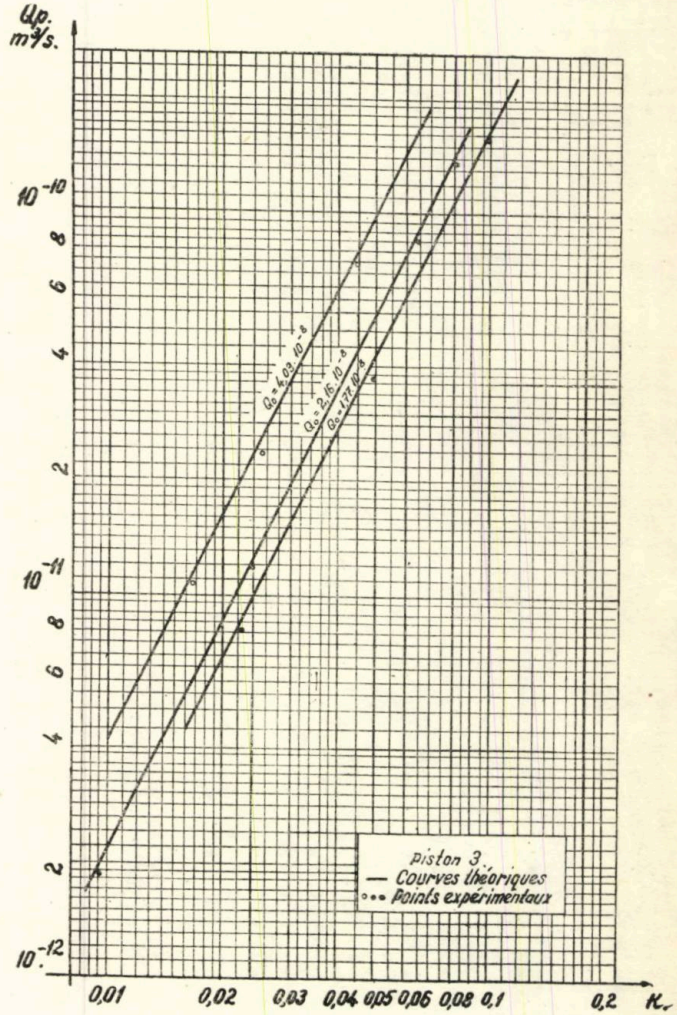
L'installation utilisée est représentée schématiquement dans la fig. 13. On y voit : *1* — pompe à piston, *2* — variateur de vitesse, *3* — moteur électrique, *4* — indicateur type Watt, *5* — manomètre, *6* —conduit de


Qp.
m³/s.
10⁻⁶
10⁻⁷
10⁻⁸
Q₀ = 2,6 10⁻⁷
Q₀ = 1,85 10⁻⁷
Q₀ = 1,32 10⁻⁷
Piston 1
— Courves théoriques.
••• Points expérimentaux.
0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 1 2 3 4 5 6 K.

a


Qp
m³/s.
10⁻⁷
10⁻⁸
3.10⁻⁹
0
Q₀ = 1,67 10⁻⁷
Q₀ = 8,74 10⁻⁸
Q₀ = 4,44 10⁻⁸
Piston 2
— Courves théoriques
••• Points expérimentaux
0,3 1 2 3 K

b


Qp.
m³/s.
10⁻¹⁰
10⁻¹¹
10⁻¹²
Q₀ = 5,03 10⁻⁸
Q₀ = 2,16 10⁻⁸
Q₀ = 1,11 10⁻⁸
piston 3
— Courves théoriques
••• Points expérimentaux
0,01 0,02 0,03 0,04 0,05 0,06 0,08 0,1 0,2 K.

c

Fig. 14

refoulement, *7* — robinet, *8* — réservoire d'alimentation, *9* — piézomètre, *10* — robinet, *11* — conduit d'alimentation, *12* — reservoir collecteur.

La température du liquide (houille de turbine) peut être connue en chaque moment avec une précision de 0,5°C.

Les jeux radials sont : $e_1 = 0{,}119$ mm, $e_2 = 0{,}0775$ mm, $e_3 = 0{,}019$ mm. Ils ont été réalisés par les trois pistons de longueur $l = 52{,}6$ mm, le cylindre ayant un diamètre $D_c = 51{,}986$ mm.

La pression, variée grace au robinet *7*, peut être connue par l'indicateur *4*, ou par une lecture directe sur le manomètre *5*.

Le débit de fuite Q_p est déterminé par le volum collecté dans le vase *12*, chronométrée, ou par la lecture des valeurs initiales et finales du niveau libre du piézomètre *9*, valeurs qui correspondent à la même position du piston (point mort supérieur).

Le tableau 1 donne les valeurs du Q_0 pour les trois jeux; K a les valeurs : $K_1 = 0{,}3 \ldots 4$ pour e_1, $K_2 = 0{,}1 \ldots 1{,}7$ pour e_2 et $K_3 = 0{,}009 \ldots$ $\ldots 0{,}1$, pour e_3.

Tableau 1

ω Hz	Q_0 m³/s		
	e_1	e_2	e_3
3,77	$1{,}12\ 10^{-7}$	$7{,}14\ 10^{-8}$	$1{,}77\ 10^{-8}$
4,60	$1{,}35\ 10^{-7}$	$8{,}74\ 10^{-8}$	$2{,}16\ 10^{-8}$
8,80	$2{,}60\ 10^{-7}$	$1{,}67\ 10^{-7}$	$4{,}03\ 10^{-8}$

Les fig. 14 *a*, *b*, *c* représentent les courbes $Q_p = f(Q_0, K)$ pour les jeux e_1, e_2, e_3.

4. Conclusions

1. Les courbes obtenues dans les conditions des recherches expérimentalles présentées ci-dessus, sont très approchées des courbes théoriques obtenues à l'aide de (20) et (21), ce qui confirme la justesse des hypothèses faites dans l'exposition théorique.

2. Les écarts d'environ 10% sont dues en grande mesure, aux conditions du travail, à savoir :

a) l'influence des variations de la température de l'houille qui néanmoins existent, mais sont comprises dans les valeurs moyennes des lectures directes ;

b) l'impossibilitée de la précision du controle des excentricités (mais qui sont aussi inclues dans les valeurs moyennes considérées) ;

c) la difficulté d'une lecture précise des pressions à l'aide du manomètre ;

d) l'intervention des oscillations des soupapes.

3. On est en train de poursuivre les recherches expérimentalles, en utilisant tout une gamme élargie de valeurs des interstices et des pressions, dans le but d'établir une corrélation étroite entre celles-ci et les résultats théoriques acquis.

Reçue le 16 septembre 1971

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire d'Hydraulique et
de Machines hydrauliques

BIBLIOGRAPHIE

1. Ciobanu C., Matei P., Biliuţă E., *La détermination expérimentale du débit de fuite par des interstices annulaires micrométriques.* Communication présentée lors de la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, le 23—30 septembre 1967.

ASUPRA MIŞCĂRII FLUIDELOR VISCOASE INCOMPRESIBILE PRIN INTERSTIŢII INELARE CU PEREŢI ÎN MIŞCARE RELATIVĂ ALTERNATIVĂ DE TRANSLAŢIE

(Rezumat)

Se studiază analitic şi experimental curgerea unui fluid viscos (ulei), prin interstiţiul piston-cilindru.

Se stabilesc relaţii generale de calcul pentru debitul de scăpări şi tensiunea tangenţială. Ele se particularizează pentru cazul pompelor cu piston cu simplu efect, pentru care s-au întreprins şi studii experimentale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 537.24

CONSIDERAȚII CU PRIVIRE LA INSUFICIENȚA CONCEPTULUI CLASIC DE DIAMETRU ECHIVALENT ÎN CALCULELE DE TRECERE A CĂLDURII LA CONDUCTE ELIPTICE

DE

I. CURIEVICI, DAVID PERETZ, MAIER PERLMAN și AKIBA SEGAL

1. Scopul lucrării

Deoarece la conductele cu secțiune eliptică diametrul echivalent, folosit uzual în calculul trecerii căldurii la conducte cu secțiune necirculară, nu redă corect condițiile particulare de desfășurare a acestui proces, se propune pentru acest caz o relație specială de calcul pentru regimul turbulent de curgere forțată ; în această relație, o funcție de criteriul $\mathcal{R}e$ a raportului semiaxelor elipsei caracterizează influența geometriei asupra condițiilor termice la limită.

2. Stadiul actual al cercetărilor

2.1. Limitele noțiunii de diametru echivalent

În procesele de trecere a căldurii, coeficientul de trecere α este o funcție complexă de un mare număr de mărimi, geometria sistemului respectiv intervenind cu o pondere importantă, încă insuficient studiată

În cazurile în care curgerea fluidului în regimturbulent are loc în canale sau țevi cu secțiuni necirculare (eliptice, dreptunghiulare ș. a.), relațiile de calcul întîlnite în literatură sînt prezentate în general ca o funcție de forma :

$$\mathcal{N}u_{d_e} = f(\mathcal{R}e_{d_e}, \mathcal{P}r, l/d_e^{-1}), \tag{1}$$

în care l reprezintă lungimea canalului (țevii), d_e — diametrul echivalent.

Raționamentul utilizat se bazează pe ideea că acest diametru trebuie astfel calculat încît raportul celor două forțe care intervin la curgerea flui-

dului — forțele de presiune ce acționează pe secțiunea de curgere F și cele de frecare de pe perimetrul udat P — să corespundă celor pentru conducta circulară. Cu această condiție, se obține:

$$d_e = \frac{4F}{P}. \tag{2}$$

Utilizarea diametrului echivalent, cu toate că este o dimensiune geometrică convențională, permite, în anumite cazuri, calculul cu suficientă exactitate pentru tehnică a mărimilor hidraulice și termice necesare. În alte cazuri, datorită geometriei sistemului și condițiilor la limită, această mărime este insuficientă, așa cum este evidențiat și în [1] pentru conducte triunghiulare, în [2] pentru conducte dreptunghiulare, în [3] pentru secțiuni inelare ș. a.

Concluziile cele mai importante care rezultă din lucrările citate ar putea fi rezumate astfel:

a) influența geometriei sistemului asupra curgerii și, implicit, asupra procesului de trecere a căldurii nu poate fi redată întotdeauna prin diametrul echivalent definit prin (2), deci printr-un parametru general, deoarece el nu reflectă în suficientă măsură particularitățile sistemului;

b) abaterile cele mai importante ale rezultatelor experimentale în raport cu cele calculate cu ajutorul diametrului echivalent se observă la secțiunile poligonale și eliptice;

c) în zona de tranziție de la curgerea laminară spre cea turbulentă complet dezvoltată, curgerea devine turbulentă numai în mijlocul curentului de fluid și rămîne laminară în regiunile din apropierea peretelui cu colțuri. Menținerea și extinderea substratului laminar de curgere, pentru anumite valori ale numărului $\mathcal{R}e$, este funcție atît de geometria secțiunii cît și de valoarea criteriului $\mathcal{P}r$, avînd deci o influență directă asupra cîmpului de temperaturi în fluid și a valorilor coeficienților de trecere a căldurii.

2.2. Analiza dimensională și geometria sistemului

Este evident că influența unei geometrii date a sistemului asupra trecerii căldurii va depinde de natura fluidului și de regimul de curgere a acestuia ($\mathcal{R}e$). Deoarce această dependență nu este cunoscută, se recurge la analiza dimensională folosind diametrul echivalent definit prin ecuația (2). Ulterior, pentru cazul particular studiat (conducte eliptice), se introduce suplimentar o funcție de semiaxele a și b ale elipsei, în vederea caracterizării complete a geometriei sistemului.

Analiza calitativă preliminară a procesului de trecere a căldurii, în cazul curgerii forțate în regim turbulent pentru secțiuni necirculare, indică pentru coeficientul α o expresie de forma:

$$\alpha = f(w, \nu, \lambda, \rho, c, d_e), \tag{3}$$

în care w reprezintă viteza medie de curgere a fluidului, ν — coeficientul de vîscozitate cinematică al fluidului, λ — coeficientul de conductivitate termică al fluidului, c — căldura specifică a fluidului, d_e — diametrul echivalent (2).

Considerente de ordin teoretic și experimental asupra formei funcției (3) conduc la relația:

$$\alpha^m \nu^n d_e^p = A w^q \rho^r c^s \lambda^t, \tag{4}$$

în care exponenții m, n ,..., t sînt numere întregi și pozitive, iar A un factor de proporționalitate.

Această corelare a factorilor din ecuația (4) ușurează aplicarea metodei R a y l e i g h în analiza dimensională a procesului considerat.

Rezolvarea sistemului de ecuații (4 ecuații cu 7 necunoscute) obținut, folosind ca mărimi fundamentale cantitatea de căldură Q, lungimea L, masa M, timpul T și temperatura θ, conduce la următoarele soluții în funcție de 3 parametri nedeterminați x, y și z:

$$\begin{cases} m = x + y, & q = x + z, \\ n = z, & r = s = x, \\ p = y - z, & t = y. \end{cases} \tag{5}$$

Înlocuind soluțiile (5) în ecuația (4) se obține relația:

$$\alpha = A w^{\frac{x+z}{x+y}} (\rho c)^{\frac{x}{x+y}} \lambda^{\frac{y}{x+y}} \nu^{-\frac{z}{x+y}} d_e^{\frac{z-y}{x+y}}. \tag{6}$$

Din datele experimentale existente [5] pentru conducte cilindrice și canale de diferite secțiuni necirculare se obțin următoarele valori numerice pentru exponenții sistemului de ecuații (5):

$$x = 2, \quad y = 3, \quad z = 2.$$

Astfel ecuația (6) ia forma:

$$\alpha = A w^{0,8} (\rho c)^{0,4} \lambda^{0,6} \nu^{-0,4} d_e^{-0,2}, \tag{7}$$

constanta A avînd valoarea 0,023.

Utilizarea ecuației (7) pentru conducte eliptice denotă că pentru valori ale numărului Reynolds nu prea mari (pînă la 25 000), rezultatele calculate cu această ecuație prezintă abateri relativ importante față de valorile experimentale [4]. În diagrama din fig. 1 sînt redate aceste abateri în funcție de $\mathcal{R}e$, fluidul de lucru fiind apa.

Plecînd de la ideea că folosirea diametrului echivalent ca dimensiune geometrică determinantă în ecuațiile criteriale este totuși utilă, pentru a corecta abaterile față de datele experimentale se pot completa ecuațiile de calcul cu ajutorul *anumitor parametri geometrici*, care să reflecte corespunzător influența geometriei sistemului în procesele studiate. În cele ce urmează

este indicat modul în care a fost concepută rezolvarea acestei probleme pentru secțiunile eliptice.

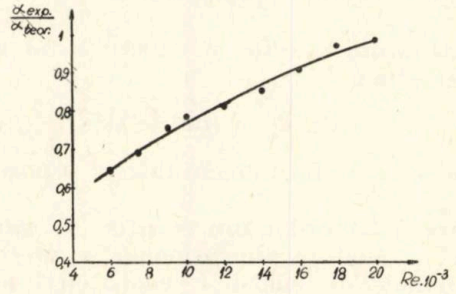


Fig. 1. – Coeficientul α: — calculat cu relația (7); o — determinat experimental [4].

3. Relație de calcul a coeficientului de trecere a căldurii pentru conducte eliptice

Pentru a caracteriza trecerea căldurii în cazul conductelor eliptice se propune completarea ecuației (7) cu un factor care să reflecte cît mai complet geometria elipsei. Încercările de corelare au arătat că cea mai adecvată corecție ar consta în înmulțirea membrului drept al ecuației (7) cu raportul semiaxelor elipsei, b/a, ridicat la o putere μ, unde μ reprezintă un exponent a cărui formă va fi explicată ulterior.

În alegerea formei exponentului μ s-a ținut seama de următoarele considerente:

a) factorul $(b/a)^{\mu}$ trebuie să compenseze eroarea introdusă prin folosirea ecuației (7) pe întregul domeniu de curgere turbulentă;

b) pentu valori mici ale numărului $\mathcal{R}e$ exponentul μ trebuie să fie o funcție descrescătoare de $\mathcal{R}e$;

c) pentru valori relativ mai mari ale numărului $\mathcal{R}e$, dimensiunile secțiunii eliptice nu mai prezintă importanță deci exponentul μ trebuie să tindă la zero astfel ca factorul $(b/a)^{\mu}$ să tindă la 1.

În consecință se propune pentru exponentul μ o expresie de forma:

$$\mu = K_1 - K_2 \lg \mathcal{R}e, \tag{8}$$

utilizabilă pînă la valoarea $\lg \mathcal{R}e = K_1/K_2$, după care se folosește relația (7) valabilă pentru curgerea turbulentă în conducte cu secțiune circulară, respectiv cu $d_e = d$.

O corelare mai completă ar trebui să țină seama și de faptul că la conducte eliptice cu rapoarte mici ale semiaxelor ($b/a < 0{,}20$) curgerea turbulentă se stabilizează pentru valori mai mari ale lui $\mathcal{R}e$ în raport cu conductele la care $b/a > 0{,}85$, unde turbulența este aproximativ similară

cu cea din conductele circulare. În consecinţă, μ tinde la zero pentru diferite valori ale lui $\mathcal{R}e$, în funcţie de valoarea excentricităţii elipsei, expresia acestuia fiind de fapt o funcţie de $\mathcal{R}e$ şi ε (excentricitate). Analiza datelor experimentale din literatură arată că neglijarea dependenţei exponentului μ de ε conduce la apariţia unor erori relativ mici, care pot fi neglijate.

Prelucrarea datelor experimentale din [4] a condus la valorile :

$$K_1 = 2{,}1 \text{ şi } K_2 = 0{,}48,$$

astfel încît relaţia de calcul ia forma :

$$\alpha = 0{,}023\, w^{0,8} \left(\frac{\rho c}{\nu}\right)^{0,4} \lambda^{0,6} d_e^{-0,2} \left(\frac{b}{a}\right)^{2,1} - 0{,}48 \lg \mathcal{R}e. \tag{9}$$

Comparaţia valorilor criteriului $\mathcal{N}u$ calculate cu (9) cu cele date de (7) precum şi cu cele date de relaţia propusă de B a r r o w [4]

$$\mathcal{N}u = 0{,}00165\, \mathcal{R}e^{1,06}\, \mathcal{P}_k^{0,4}, \tag{10}$$

pentru $b/a = 0{,}284$, fluidul de lucru fiind apa, este prezentată în fig. 2.

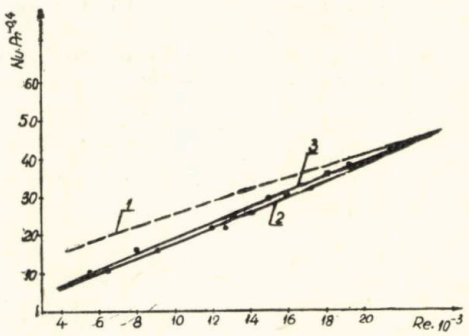


Fig. 2. — Valorile criterului $\mathcal{N}u$: *1* — calculat cu (7); *2* — calculat cu (9); *3* — calculat cu (10); ● — determinat experimentai [4].

În concluzie, după cum rezultă din analiza făcută şi din exemplul prezentat, relaţia (9) poate fi aplicată pentru calculul coeficientului de trecere a căldurii la conducte eliptice, la curgerea turbulentă, forţată şi probabil poate fi extinsă şi pentru alţi agenţi termici, cu alte valori ale criteriului $\mathcal{P}_k$.

Primită la 20 octombrie 1971

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de termotehnică şi maşini termice
şi
Centrul de cercetări tehnice şi fizice
al Academiei R. S. R., filiala Iaşi

BIBLIOGRAFIE

1. Carlson L. W., Irvine T. F. jr., Trans A.S.M.E., J. Heat Transfer, 441—444 (1961).
2. Hartnett J. P., Koh J. C. J., McComas S. T., Trans. A.S.M.E., J. Heat Transfer, 82—88 (1962).
3. Gröber, Erk, Grigull, *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung.* Springer Verlag, S. 334, 1963.
4. Barrow H., *Heat Transfer.* Vol. II, FC *41*, Preprints of papers presented at the Fourt International Heat Transfer Conference, Paris—Versailles, 1970.
5. Исаченко В. П. и сотр., *Теплопередача.* Изд., „Энергия", М., 1965.

BETRACHTUNGEN ÜBER DIE UNZULÄNGLICHKEIT DES KLASSISCHEN BEGRIFFES VOM GLEICHWERTIGEN DURCHMESSER FÜR DIE BERECHNUNG DES WÄRMEÜBERGANGS IN ELLIPTISCHEN ROHREN

(Zusammenfassung)

Dadurch dass der gleichwertige Durchmesser, der bei den üblichen Berechnungen des Wärmeüberganges bei elliptischen Rohren gebraucht wird nicht die besonderen Randbedingungen dieses Prozesses wiedergeben kann, wird eine neue Gleichung (9) für diesen Fall vorgeschlagen, die für die erzwungene, turbulente Strömung gültig ist. Eine Funktion von $\mathcal{R}e$, des Halbachsenverhältnisses, kann den Einfluss der Geometrie auf die thermischen Randbedingungen kennzeichnen.

Die Prüfung der vorgeschlagenen Gleichung mit Hilfe der Versuchsergebnisse [4] hat die Gültigkeit dieser Berechnungsweise bewiesen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 697.35

STUDII ASUPRA RADIATOARELOR CU LICHID INTERMEDIAR CU ELEMENȚI DIN MATERIAL PLASTIC

DE

GÉRARD d'ALBON, VALERIU CERNESCU, EMIL JUGUREANU, MAIER PERLMAN și D. COSTIN

1. Introducere

Realizările obținute recent în domeniul producerii și prelucrării materialelor plastice au condus pe autori la ideea utilizării acestora în construcția de elemenți de radiator.

Într-o etapă preliminară au fost efectuate o serie de cercetări pe elemenți de hostalen, rezultatele obținute în decursul celor 18 luni de experimentare dovedindu-se satisfăcătoare. Ulterior aceste încercări au fost orientate spre materiale noi, de preferință elemenți din polietilenă și tuburi P.V.C., produse ale „Uzinei de prelucrare a maselor plastice" din Iași. Rezultatele obținute au permis efectuarea unor analize atente a comportării materialelor plastice la ciclurile de încălzire-răcire din instalațiile de încălzire centrală precum și analiza rezultatelor economice ca urmare a folosirii acestora într-o producție viitoare de radiatoare.

2. Cercetări experimentale

În cadrul programului de cercetare au fost realizate și experimentate trei tipuri de radiatoare cu elemenți din material plastic.

1. Tipul M.P.1 (fig. 1) este format dintr-un distribuitor metalic executat din țeavă din fier rectangulară avînd la partea superioară un număr de 8 elemenți din polietilenă racordați prin ștuțuri metalice.

Încălzirea radiatorului în laborator s-a realizat pe cale electrică cu ajutorul unei rezistențe alimentată la o tensiune alternativă de 220 V, plasată în interiorul unei țevi cu diametrul de 17,5 mm, care în exploatarea curentă constituie conducta de circulație a fluidului încălzitor.

Măsurătorile de temperatură în diferite puncte ale radiatorului au condus la valoarea medie de 65°C pentru materialul plastic și de 70°C pentru

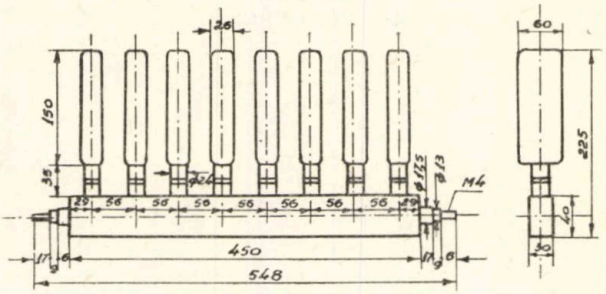


Fig. 1

distribuitorul metalic. Cîmpul termic are o distribuție uniformă. S-a constatat că strangularea elementului din material plastic la racordul cu partea metalică nu influențează negativ convecția naturală a lichidului intermediar care prezintă de astfel o circulație bună în interiorul radiatorului.

Considerînd suprafața de schimb de căldură pentru materialul plastic $S_{pl} = 0{,}249$ m² și pentru distribuitorul metalic $S_{met} = 0{,}064$ m², calculele efectuate pentru o densitate a fluxului de căldură $q = 480$ kcal/m²h au permis stabilirea următoarelor valori ale coeficientului de transmitere a căldurii :

$$K_{plastic} = 9{,}5 \text{ kcal/m}^2\text{h grd}, \qquad K_{mediu} = 10{,}25 \text{ kcal/m}^2\text{h grd}.$$

Comparînd greutatea de metal consumată și costul acestui tip de radiator cu un radiator clasic cu elemenți din fontă la un debit de căldură de 1 000 kcal/h a rezultat că introducerea pe scară largă în exploatare a acestor radiatoare permite realizarea unor economii de metal E_m de 85% și a unor economii valorice E_v de 63,7%.

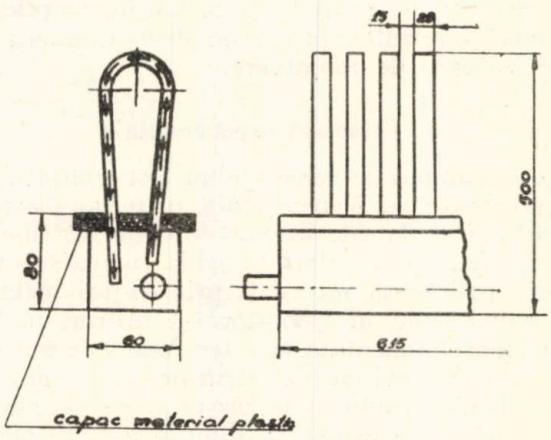


Fig. 2

2. Tipul M.P.2 (fig. 2) este un radiator cu cuvă metalică confecționată din tablă de fier de 0,8 mm grosime și elemenți din țeavă de material plastic (P.V.C.) cu diametrul exterior de 25 mm. Lungimea țevii pentru un element $l = 100$ cm.

Radiatorul poate fi executat în două variante: deschis (neetanș) și complet etanș. Ultima variantă se execută prin lipirea cu un adeziv sintetic atît a capacului de material plastic de cuva metalică cît și a țevilor de material plastic de capac.

Admițînd temperatura materialului plastic de 70°C și temperatura interioară a camerei de 20°C, radiatorul tip M.P.2 cu 15 elemenți poate furniza un debit de căldură $q = 370$ kcal/m²h avînd un coeficient mediu global de transmitere a căldurii $K = 7{,}4$ kcal/m²h grd. În ipoteza utilizării aburului de joasă presiune ca agent încălzitor diametrul țevii distribuitorului este de 18 mm iar în cazul folosirii apei supraîncălzite valoarea calculată a acestui diametru este de 30 mm.

3. Varianta M. P.3 (fig. 3) realizează o concentrare mai mare a elementilor din material plastic conducînd la compactizarea ansamblului și la realizarea unei economii mai mari de metal.

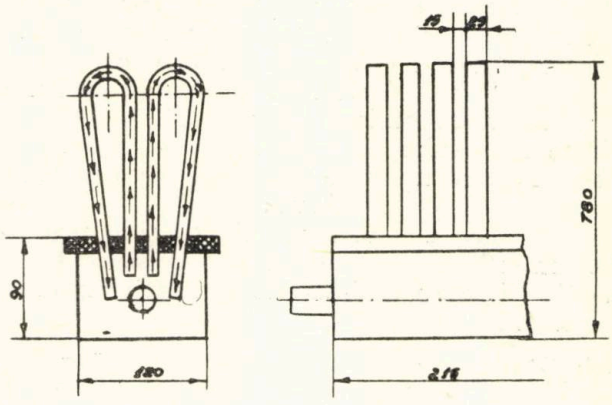


Fig. 3

Conducta de circulație a agentului primar este dispusă la mijlocul cuvei metalice spre deosebire de tipul M. P. 2 unde aceasta era amplasată excentric în vederea realizării unei bune convecții naturale a lichidului intermediar. Admițînd aceeași parametri de calcul ca și la tipul anterior, radiatorul tip M. P. 3 furnizează un debit de căldură $q = 337$ kcal/m²h cu un coeficient global de transmitere a căldurii $K = 6{,}8$ kcal/m²h grd.

Constructiv, aceste tipuri de radiatoare prezintă avantajul unui montaj ușor și a unei manipulări fără precauții speciale.

Suprapresiunea cauzată de dilatarea apei este ușor preluată atît la tipul M.P.2 cît și la tipul M.P.3 de formă ovală a țevilor P.V.C care pot fi prelucrate în producție de serie mare. La radiatorul tip M. P. 3 lungimea de țeavă folosită pentru un element a fost 150 cm, numărul de elemenți pentru debitul de căldură menționat fiind $n = 10$. Diametrul conductei de circulație a agentului încălzitor este de 46 mm.

Analiza consumului de metal și a costului acestor tipuri de radiatoare în comparație cu un radiator clasic cu elemenți din fontă pentru un debit de căldură de 1 000 kcal/h conduce la concluzia că folosirea radiatoarelor propuse într-o exploatare curentă de mare serie permite realizarea unor economii de metal $E_m = 75...80\%$ și valorice $E_v = 30...40\%$.

De menționat că în calculul consumului de metal și costului la toate cele trei tipuri de radiatoare prezentate s-a luat în considerație atît cantitatea de metal necesară executării măștilor cu care aceste radiatoare sînt echipate în mod obișnuit, cît și costul acestora.

3. Concluzii

1. Radiatoarele propuse și experimentate confirmă încă odată posibilitatea realizării practice a unor corpuri de încălzire, pentru instalații de încălzire centrală, executate din diverse materiale plastice.

2. Experiențele făcute au scos în evidență buna comportare a acestor radiatoare pe tot parcursul încercărilor precum și economicitatea lor în comparație cu radiatoarele utilizate în prezent.

3. Valorile coeficienților de transmitere a căldurii sînt superioare celor corespunzătoare altor tipuri de radiatoare, ceea ce permite micșorarea gabaritului, la debite egale de căldură.

4. Larga dezvoltare a industriei chimice și a materialelor plastice creează premisele introducerii în timp scurt și pe scară largă a acestor materiale în producția viitoare a radiatoarelor, calitativ superioare și cu deosebite avantaje economice.

Primită la 21 iunie 1971

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de termotehnică și mașini termice

BIBLIOGRAFIE

1. D'Albon G., Gurievici I., Ursescu D., Gutman M., Jugureanu E., Macri V., Apetrei N., *Un nou tip de radiator pentru încălziri centrale.* Bul. Inst. polit. Iași, IX (XIII), *1—2*, 313—326 (1963).
2. D'Albon G., Amihăesii I., Simionescu A., Perlman M., Cernescu V., Jugureanu E., *Instalații experimentale de încălzire cu radiatoare cu lichid intermediar.* St. și cerc. INCERC, Buc., ser. Instalații — 33, *7*, 125—138 (1968).
3. Antohi I., *Corpuri de încălzire cu lichid intermediar.* Rev. constr. și a mat. de constr., **20**, *12*, 663—668 (1966).

ÉTUDES SUR LES RADIATEURS À FLUIDE INTERMÉDIAIRE AVEC DES ÉLÉMENTS EN PLASTIQUE

(Résumé)

On présente les résultats de l'expérimentation de nouveaux radiateurs à fluide intermédiaire avec des éléments en plastique.

On expose les conclusions concernant leur valorisation en estiment en même temps les économies valoriques et en métal pouvant résulter de l'utilisation généralisée de ces radiateurs.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 536.24

LA DÉTERMINATION DU COEFFICIENT α RÉEL DANS LA CONVECTION A L'AIR EN TENANT COMPTE DE L'EFFET JACQ [1])

PAR

EMIL JUGUREANU

1. Introduction

L'anomalie thermique Jacq [1] a donné naissance à plusieurs études théoriques et pratiques dans le but d'élucider ce phénomène dans le domaine théorique et expérimental. Dans le cadre de la Chaire de Thermotechnique de l'Institut Polytechnique de Jassy, on a effectué plusieurs expériences dans le but de vérifier l'existence de l'anomalie thermique Jacq [2], [3].

2. Détermination du coefficient α réel dans la convection à l'air, en tenant compte de l'effet Jacq

Dans cette recherche on se propose de poursuivre, dans le cas de la convection libre à l'air, l'élévation de la chute thermique Jacq, et de déterminer le coefficient $\alpha_{réel}$, comparativement à l'α classique. Dans ce but il est nécessaire de connaître les constantes k_i et k_r de proportionnalité pour les métaux avec lesquels on travaille.

La fig. 1 montre l'aspect de la variation du champ de température dans une paroi métallique conformément aux recherches de J a c q. On considère une paroi de cuivre d'une épaisseur $\delta = 300$ mm. À la surface d'entrée et de sortie du flux calorique q, il y aura des régions où apparaîtra l'effet Jacq avec des épaisseurs δ_{ji} et δ_{jr} respectivement. Pour le cuivre, dans la région où est valable la loi (1), on dénote avec λ le coefficient de conductivité thermique ; pour la région où apparaît l'effet Jacq d'épaisseur δ_j, le coefficient de conductivité thermique est désigné par λ_j; α_{r_1} est le coefficient réel de transmission de la chaleur du fluide chaud à la paroi,

[1]) Communication présentée lors de la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Jassy, le 29—30 septembre 1967.

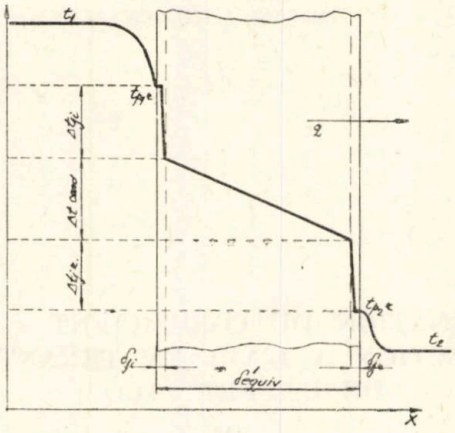


Fig. 1

pendant que α_{r_2} est le coefficient réel de transmission de la chaleur de la paroi au fluide froid.

En régime établi, le flux de chaleur q est donné par les équations de Newton et Fourier

$$(1) \quad q = \alpha_{r_1}(t_1 - t_{p_{r_1}}) = \frac{\lambda_{ji}}{\delta_{ji}} \Delta t_{ji} = \frac{\lambda}{\delta} \Delta t_{\text{cond}} = \frac{\lambda_{jr}}{\delta_{jr}} \Delta t_{jr} = \alpha_{r_2}(t_{p_{r_2}} - t_2).$$

Pour le cuivre $\delta = 300$ mm, (1) devient $\Delta t_{ji} = \Delta t_{\text{cond}}$, calculé par Jacq [1], pendant que pour $\delta = 162$ mm, $\Delta t_{jr} = \Delta t_{\text{cond}}$, calculé par Jacq [1],

$$\Delta t_{ji} = \Delta t_{\text{cond}} = q \frac{\delta_{300}}{\lambda_{\text{cuivre}}} = q k_i ,$$

$$\Delta t_{jr} = \Delta t_{\text{cond}} = q \frac{\delta_{162}}{\lambda_{\text{cuivre}}} = q k_r .$$

Ensuite on donne les valeurs des constates k et les épaisseurs équivalentes pour le nickel, le cuivre, l'aluminium et le fer.

Épaisseurs équivalentes, où $\Delta t_{\text{cond}} = \Delta t_{\text{jacq}}$:

Dans le *cas du chauffage* ($\delta_{ei} = \delta_{\text{équivalents chauffage}}$) :

nickel, $\delta_{ei} = k_i \lambda = 10{,}8\,10^{-4}\ 51 = 0{,}055$ m
cuivre, $\delta_{ei} = k_i \lambda = 8{,}3\,10^{-4}\ 360 = 0{,}298$ m
aluminium, $\delta_{ei} = k_i \lambda = 6{,}6\,10^{-4}\ 160 = 0{,}1055$ m
fer, $\delta_{ei} = k_i \lambda = 6{,}25\,10^{-4}\ 50 = 0{,}0312$ m.

Dans le *cas du refroidissement* ($\delta_{er} = \delta_{\text{équivalents refroidissement}}$) :

nickel, $\delta_{er} = k_r \lambda = 2{,}7\,10^{-4}\ 51 = 0{,}01377$ m
cuivre, $\delta_{er} = k_r \lambda = 4{,}5\,10^{-4}\ 360 = 0{,}162$ m

aluminium, $\delta_{er} = k_r \lambda = 4\,10^{-4}\,160 = 0{,}064$ m
fer, $\delta_{er} = k_r \lambda = 2\,10^{-4}\,50 = 0{,}01$ m.

On a pris avec approximation la valeur de la constante pour l'aluminium, $k = 4$, puisqu'on n'a pas trouvé de données dans la littérature.

Remarque. Les valeurs de λ ont été prises du Manuel de l'ingénieur thermoélectricien, vol. I, p. 260.

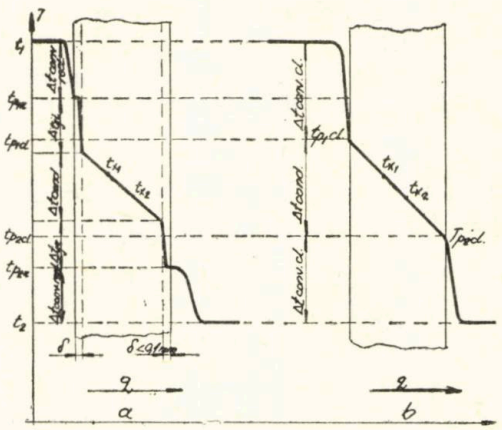


Fig. 2

Sur la fig. 2 on donne comparativement la variation du champ de température dans une paroi (fig. 2 *a*) d'après la théorie de J a c q, et (fig. 2*b*) d'après la théorie classique. Par exemple, pour plusieurs valeurs de la température t_x de l'intérieur de la paroi, le champ de température d'après la théorie classique a la configuration de la fig. 2 *b*. Ici t_{p_1} et t_{p_2} sont les températures des surfaces extérieures (obtenues par le prolongement de la ligne qui passe par les points t_{x_1} et t_{x_2}).

On remarque qu'en réalité les températures des surfaces extérieures sont différentes, t_{p_1} réel et t_{p_2} réel. Par conséquent, la chute de température $\Delta t_{\text{convection}}$ classique est formée par :

$$\Delta t_{\text{conv. classique}} = \Delta t_{\text{conv. réel}} + \Delta t_j \,.$$

La chute totale de la température $\Delta t_{\text{conv. classique}}$ dans la théorie classique est due à la convection étant mise dans le compte du coefficient α, appelé α classique. Ainsi :

$$q_{\text{réel}} = \alpha_{1\text{classique}} (t_1 - t_{p_1\,\text{classique}}) = \frac{\lambda}{\delta} (t_{p_1\,\text{classique}} - t_{p_2\,\text{classique}}) =$$

$$= \alpha_{2\ \text{classique}} (t_{p_2\,\text{classique}} - t_2).$$

En réalité, le flux de chaleur est donné par l'équation

$$q_{\text{réel}} = \alpha_{1\,\text{réel}}\,(t_1 - t_{p_1\,\text{réel}}) = \frac{\lambda_{ji}}{\delta_{ji}}\,\Delta t_{ji} = \frac{\lambda}{\delta}\,\Delta t_{\text{cond}} = \frac{\lambda_{jr}}{\delta_{jr}}\,\Delta t_{jr} = \alpha_{2\,\text{réel}}\,(t_{p_2\,\text{réel}} - t_2)\,.$$

Par conséquent on soulève la question de la détermination du coefficient $\alpha_{\text{réel}}$ de transmission de la chaleur. En ce cas on a pris de tuyaux en aluminium, cuivre et fer, de diamètres différents et pour des températures entre 20 et 1 000°C.

Les coefficients de transmission de la chaleur, $\alpha_{\text{réel}}$ et $\alpha_{\text{classique}}$, pour le cas de la convection libre à l'air, sont donnés par les fig. 3 et 4.

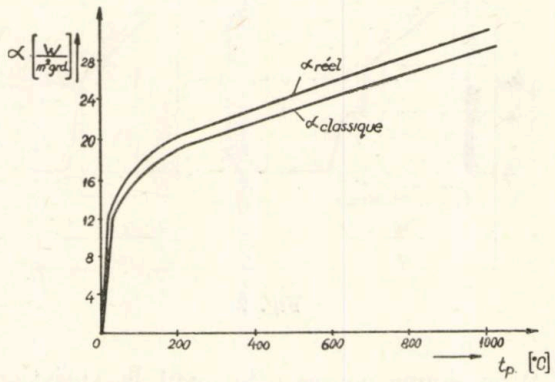


Fig. 3

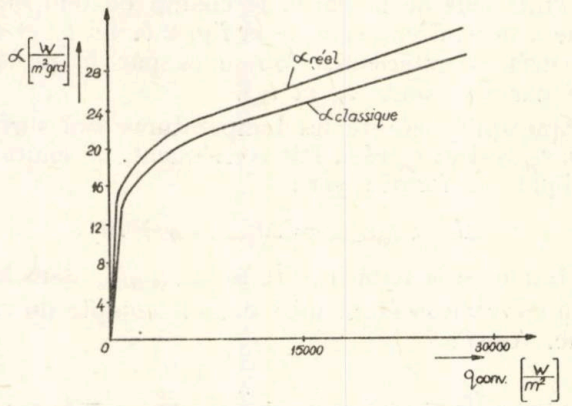


Fig. 4

3. Conclusion

En analysant les fig. 3 et 4, on remarque l'importance de la chute thermique Jacq dont on doit tenir compte dans les phénomènes de transmissions de la chaleur.

Reçue le 14 janvier 1971

Institut Polytechnique, Jassy
Claire de Thermotechnique
et de Machines thermiques

BIBLIOGRAPHIE

1. Jacq J., Chateau M., *Anomalie de la distribution de température dans les couches superficielles d'un solide.* C. R. Ac. Sc. Paris, **252**, *21*, 3201–3203 (1961).
2. D'Albon G., Jugureanu E., Cloţan V., Lozonschi Gh., Apetrei N., *Considérations sur l'anomalie thermique Jacq et résultats expérimentaux.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XV (XIX), *3–4* (1969).
3. Jugureanu E., *L'étude de l'effet Jacq par la méthode du coefficient* α. Bul Inst. polit. Iaşi, XVI (XX), *1–2*, s. IV (1970).

DETERMINAREA COEFICIENTULUI α REAL ÎN CONVECŢIA CU AER, ŢINÎND SEAMA DE EFECTUL JACQ

(Rezumat)

Anomalia termică Jacq, pusă în evidenţă pentru prima dată în anul 1961, are consecinţe deosebite în diverse domenii.

În lucrarea de faţă se arată unele aspecte ale consecinţei efectului Jacq în convecţia liberă cu aer.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 536.2

ASUPRA UNEI NOI CONCEPȚII DE MODELARE A PROCESULUI DE TRECERE A CĂLDURII LA SUPRAFEȚE CU RUGOZITĂȚI ARTIFICIALE ȘI MICROARIPIOARE

DE

MAIER PERLMAN

1. Scopul lucrării

Prin introducerea noțiunii de raport caracteristic geometro-dinamic al suprafeței de schimb de căldură și exprimarea dependenței raportului criterial $\mathcal{C}_{Nu}$ în funcție de acesta, se urmărește, în principal, stabilirea unei metodici noi de analiză a trecerii căldurii la suprafețe cu rugozități artificiale și microaripioare precum și definirea unor posibilități simplificate de calcul și reprezentare a acestor procese.

2. Considerații generale

Numeroase studii teoretice și experimentale recente, efectuate în scopul fundamentării unor noi căi de intensificare a proceselor de trecere a căldurii și de compactizare a aparatelor de schimb de căldură, dovedesc că suprafețele extinse cu ajutorul rugozităților artificiale (r.a.) sau microaripioarelor (m. a.) constituie, din aceste puncte de vedere, una dintre soluțiile tehnice actuale cu largi perspective de aplicare și dezvoltare.

Rezultatele experimentale obținute evidențiază faptul că în general orice proeminență a suprafeței de schimb de căldură de tipul r. a. sau m. a., plasată într-un curent de fluid, constituie în fond o veritabilă aripioară. Astfel, rugozitatea suprafețelor poate crea efecte diferite și, în anumite situații, chiar opuse, unele tipuri de proeminențe stabilizînd și alungind stratul limită laminar, iar altele determinînd o creștere a turbulenței curentului de fluid și ,ca urmare, o intensificare a schimbului de căldură.

Datorită marii varietăți a aranjamentelor și formelor geometrice posibile, este extrem de dificilă dezvoltarea unei teorii unitare sau reali-

zarea unei corelări generale a datelor experimentale cunoscute în acest domeniu. Se apreciază însă că rugozitatea suprafeței influențează rezistența la frecare și în același timp schimbul de căldură, dacă grosimea stratului limită al fluidului este mai mică decît înălțimea maximă a proeminențelor, situație frecvent întîlnită odată cu creșterea turbulenței curentului de fluid, respectiv odată cu creșterea valorilor numărului Reynolds. În cazul curgerii laminare, însă, rugozitatea suprafețelor nu are nici o influență asupra rezistenței la frecare, suprafețele respective fiind considerate „netede" din punct de vedere hidraulic și, în anumite situații, chiar și din punct de vedere termic.

În majoritatea ecuațiilor criteriale existente în literatură influența geometriei acestor suprafețe în procesele de trecere a căldurii este redată prin introducerea rugozității relative ε ca parametru suplimentar. Se consideră, însă, că numai simpla formulare a dependenței procesului de rugozitatea relativă prin ecuații de tipul:

$$\mathcal{N}u = f(\mathcal{R}e,\ \mathcal{P}r,\ \varepsilon), \tag{2.1}$$

fără a ține seama de forma proeminențelor, de legea lor de distribuție și, mai ales, de legătura dintre procesele dinamicii fluidului și geometria sistemului, nu este satisfăcătoare, metoda furnizînd de fapt o serie de relații particulare, valabile într-un domeniu limitat.

Această ipoteză permite formularea ideii că exprimarea dependenței funcționale ce caracterizează trecerea căldurii la suprafețe cu r. a. sau m. a. în funcție de raportul dintre înălțimea proeminenței Δ și grosimea stratului limită al fluidului δ ar conduce la obținerea unor relații generale pentru diferite tipuri de suprafețe și proeminențe precum și în diferite regimuri de curgere ale fluidului.

3. Raportul caracteristic geometro-dinamic al suprafeței de schimb de căldură

Considerînd definiția formulată mai sus, raportul caracteristic P poate fi exprimat prin relația:

$$P = \frac{\Delta}{\delta}, \tag{3.1}$$

Este evident faptul că relația (3.1) nu este de forma unui simplex geometric obișnuit deoarece prin însăși structura sa îmbină elemente de geometrie ale sistemului cu elemente legate de natura fluidului și regimul de curgere al acestuia.

Pentru situațiile în care valoarea grosimii stratului limită nu poate fi determinată cu exactitate se propune utilizarea grosimii convenționale de calcul a stratului limită exprimată prin relația:

$$\delta_c = \frac{\lambda}{\alpha}, \tag{3.2}$$

dedusă în baza condițiilor la limită de speța a treia, ceeace conduce implicit la definirea unui raport caracteristic convențional :

$$P_c = \frac{\Delta}{\delta_c}. \tag{3.3}$$

Analiza comparativă a valorilor δ și δ_c în funcție de natura fluidului considerat dovedește că pentru metale lichide ($\mathcal{P}_r \ll 1$) și pentru gaze ($\mathcal{P}_r \approx 1$) $\delta_c \approx \delta$ iar pentru lichide ($\mathcal{P}_r \gg 1$) $\delta_c = \delta + \Psi(\mathcal{R}e, \mathcal{P}_r)$ relație în care funcția Ψ are valori determinabile și extrem de mici.

Rezultă așadar că definirea raportului caracteristic prin relația (3.3) este justificată teoretic oferind în același timp posibilități suplimentare de calcul și analiză cu rezultate sensibil apropiate și cu concluzii cu siguranță identice.

Înlocuind relația (3.2) în (3.3) rezultă :

$$P_c = \frac{\Delta}{\delta_c} = \frac{\alpha\Delta}{\lambda} = \frac{\alpha l}{\lambda}\frac{\Delta}{l} = \mathcal{N}u\,\varepsilon, \tag{3.4}$$

unde l este dimensiunea geometrică determinantă a sistemului. Relația (3.4) evidențiază faptul că în sistemul de coordonate $\mathcal{N}u - \varepsilon$ curbele P_c = constant formează o familie de hiperbole echilatere, formulare avantajoasă atît în ce privește calculul valorilor raportului caracteristic cît și din punct de vedere al reprezentării grafice a acestei dependențe funcționale.

4. Raportul criterial $\mathcal{C}_{\mathcal{N}u}$

Analiza procesului fizic de trecere a căldurii la suprafețe cu r. a. sau m. a. permite postularea următoarei dependențe funcționale :

$$\mathcal{N}u = \mathcal{N}u(\mathcal{R}e,\ P). \tag{4.1}$$

De fapt considerînd cunoscut faptul că $\frac{\delta}{l} = \varphi'(\mathcal{R}e)$ și prin analogie $\frac{\delta_c}{l} = \varphi''(\mathcal{R}e)$, respectiv $P_c = \frac{\Delta}{\delta_c} = \varphi(\mathcal{R}e)$, se poate demonstra, pornind de la unele relații clasice cunoscute, existența relației (4.1). Astfel pentru o suprafață cu r.a. sau m. a. într-un regim turbulent de curgere a fluidului,

$$\mathcal{N}u = f(\mathcal{R}e,\ \varepsilon) = f\left(\mathcal{R}e,\ \frac{\Delta}{\delta_c}\frac{\delta_c}{l}\right) = f[\mathcal{R}e,\ P\,\varphi(\mathcal{R}e)] = f\,(\mathcal{R}e, P). \tag{4.1'}$$

Pentru suprafața netedă de comparație, în aceleași condiții

$$\mathcal{N}u_0 = f_0(\mathcal{R}e), \tag{4.2}$$

de unde, prin raportarea relațiilor (4.1') și (4.2) rezultă

$$\mathcal{C}_{\mathcal{N}u} = \frac{\mathcal{N}u}{\mathcal{N}u_0} = \frac{f(\mathcal{R}e,\ P)}{f_0(\mathcal{R}e)} = F(\mathcal{R}e,\ P).$$

Cum însă $P = P(\mathcal{R}e)$ și, respectiv, $\mathcal{R}e = \mathcal{R}e(P)$, raportul criterial $\mathcal{C}_{\mathcal{N}u}$ poate fi exprimat prin relația :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{N}u} = F(P) \tag{4.3}$$

și pentru P = constant :

$$(\mathcal{C}_{\mathcal{N}u})_P = \text{constant}. \tag{4.4}$$

Pentru sisteme avînd aceeași valoare a dimensiunii geometrice determinante relațiile (4.3) și (4.4) capătă forma :

$$\mathcal{C}_\alpha = \frac{\alpha}{\alpha_0} = F(P) \quad \text{respectiv} \quad (C_\alpha)_P = \text{const}.$$

Generalizînd ideea pentru cazul unor suprafețe cu r. a. sau m. a. diferite ca profil geometric (notate cu prim și secund) rezultă conform relației (4.3) următoarele :

$$\mathcal{C}'_{\mathcal{N}u} = F'(P) \quad \text{și} \quad C''_{\mathcal{N}u} = F''(P).$$

Cele două funcții, în baza teoremelor similitudinii, ar putea diferi cel mult printr-un factor de formă, astfel încît :

$$F' = \mu F''.$$

Calculul factorului μ, efectuat cu ajutorul unor date din literatură, situează valorile acestuia în jurul unității, ceeace determină existența relației $F' \approx F''$ respectiv pentru

$$P = \text{idem}, \quad (\mathcal{C}_{\mathcal{N}u})_P = \text{idem} \text{ și } (\mathcal{C}_\alpha)_P = \text{idem}. \tag{4.5}$$

Aceste relații permit formularea unei ipoteze de o deosebită importanță și anume că *valoarea raportului criterial* $\mathcal{C}_{\mathcal{N}u}$ *respectiv a raportului* $\mathcal{C}_\alpha$ *în condițiile menționate trebuie să fie aceeași pentru toate sistemele la care raportul caracteristic geometro-dinamic are aceeași valoare.*

Privind variația numerică a raportului criterial se remarcă ușor că :

$$\lim_{P \to 0} \mathcal{C}_{\mathcal{N}u} = 1 \quad \text{și pentru} \quad P \gg 1, \quad \mathcal{C}_{\mathcal{N}u} \to \frac{S_{\text{rugos}}}{S_0}\,\mu.$$

5. Funcția $\mathcal{C}_{\mathcal{N}u} = \mathcal{C}_{\mathcal{N}u}(P)$

Existența, pentru un caz dat, a relației $\mathcal{N}u = f(\mathcal{R}e,\ \varepsilon)$ sau numai a valorilor numerice tabelate permite cu deosebită ușurință reprezentarea grafică a dependenței $P = P(\mathcal{N}u)$ — relația (3.4) — fig. 1 și ulterior a func-

ţiei $\varepsilon_{\mathcal{N}u} = \varepsilon_{\mathcal{N}u}(P)$ — fig. 2 — considerînd cunoscută şi funcţia $\mathcal{N}u_0 = f_0(\mathcal{R}e)$.

Diagrama din fig. 2 a fost trasată de autor în baza datelor experimentale obţinute de Seleznev, Teverovschi şi Antufiev [1].

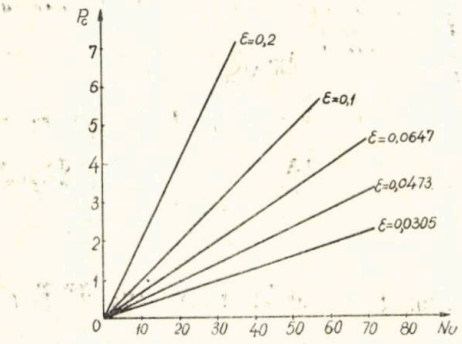


Fig. 1

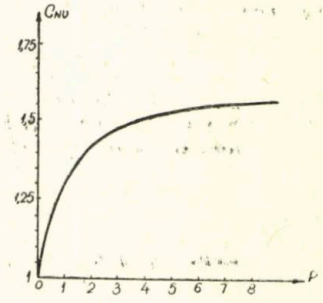


Fig. 2

Încercările au fost efectuate pe ţevi cilindrice filetate la interior folosind ca agent de lucru aerul. S-a considerat numai regimul turbulent de curgere pentru $\mathcal{R}e > 6\,000$. Analiza diagramei de mai sus conduce la ideea că raportul criterial $\varepsilon_{\mathcal{N}u}$ tinde asimptotic la o valoare limită odată cu creşterea valorilor raportului caracteristic P.

Verificările efectuate cu datele experimentale referitoare la convecţia forţată cu aer în lungul unor cilindri rugoşi avînd de această dată proeminenţe piramidale pe suprafaţa exterioară [3], au condus la valori apropiate ale raportului criterial de cele reprezentate în fig. 1., ceeace constituie o confirmare a relaţiei (4.5). Astfel, folosind rezultatele experimentale obţinute de Brun în cazul menţionat, rezultă din calcul pentru $P_c = 6$ o valoare a raportului criterial $\varepsilon_{\mathcal{N}u} = 1{,}53$, sensibil apropiată de valoarea determinată cu ajutorul curbei din fig. 2, respectiv $\varepsilon_{\mathcal{N}u} = 1{,}54$.

6. Concluzii

Introducerea raportului caracteristic geometro-dinamic în analiza procesului de trecere a căldurii la suprafeţe cu r. a. şi m. a. găseşte, în baza ipotezelor expuse mai sus, o fundamentare teoretică logică conducînd totodată la posibilitatea simplificării metodelor de calcul şi verificare a aparatelor de schimb de căldură precum şi la noi posibilităţi de generalizare şi corelare a datelor experimentale şi teoretice existente.

Primită la 21 octombrie 1971

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de termotehnică şi maşini termice

BIBLIOGRAFIE

1. Антуфьев В. М., *Эффективность различных форм конвективных поверхностей нагрева.* Изд. „Энергия", М., 1966.
2. Bergles E. A., *Survey and Evaluation of Techniques to Augment Convective Heat and Mass Transfer.* Progress in heat and mass transfer, Vol. I, New York, Pergamon Press, pp. 193—329, 1969.
3. Brun E. A., *Convection thermique le long de surfaces rugueuses.* I.F.C.E., Journées internationales de la transmission de la chaleur, I, 235 — 242 (juin 1961).
4. Chandra Lakshman V. J., *The Influence of Prandtl Number and Surface Roughness on the Resistence of the Laminar Sub-layer to Momentum and Heat Transfer.* Progress in heat and mass transfer, Vol. II, New York, Pergamon Press, 193—239 (1969).
5. D'Albon G., Cernescu V., Bendescu I., Jugureanu E., Macri V., Apetrei N., *Studiul coeficientului α în cazul convecției la rugozități artificiale și la suprafețe ondulate.* Bul. Inst. polit. Iași, XIII (XVII), *1—2*, 461—466 (1967).
6. Кэйс В. М., Лондон А. Л., *Компактные теплообменики* (trad. din l. engleză). Изд. „Энергия", М., 1967.
7. Пучков П. И., Виноградов О. С., *Теплоотдача и сопротивление развитых поверхностей нагрева при продольном обтекании.* Теплоэнергетика, **14**, *9* 54—58 (1967).
8. Roudier R., *Contribution à l'étude de la transmission de la chaleur dans un espace annulaire à paroi intérieure chauffante ondulée.* I.F.C.E., Journées internationales de la transmission de la chaleur, I, 247—267 (juin 1961).

SUR UNE NOUVELLE CONCEPTION DE LA STRUCTURE DES ÉQUATIONS CONCERNANT LA TRANSMISSION DE LA CHALEUR POUR LES SURFACES AVEC DES RUGOSITÉES ARTIFICIELLES ET DES MICROAILETTES

(Résumé)

La transmission de la chaleur pour les surfaces prévues avec des rugosités artificielles ou des microailettes est habituellement déterminée par les équations classiques de la forme $\mathcal{N}u = f(\mathcal{R}e, \mathcal{P}r, \varepsilon)$.

L'étude des processus physiques dans ces conditions a mené à l'idée que le rapport de la hauteur des rugosités à l'épaisseur de la chouche limite, dénommé rapport caractéristique géométro-dinamique, peut constituer un nouveau critérium dont l'utilité dans l'étude de ces phénomènes est démontré.

Par l'induction de ce rapport caracteristique et l'établissement de la relation du critérium C $\mathcal{N}u$ avec ce rapport on arrive à un nouveau modèle pour la transmission de la chaleur dans ces phénomènes et une méthode de calcule plus simple et d'une sphère plus large d'aplication.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.365

ANALIZA TIPURILOR DE BATERII TERMOELECTRICE CE POT FI UTILIZATE CA TREAPTĂ ÎNAINTAȘĂ DE ENERGIE PENTRU ÎMBUNĂTĂȚIREA RANDAMENTULUI CENTRALELOR

DE

GH. LOZONSCHI

În cazul bateriilor termoelectrice folosite ca treaptă înaintașă de energie în instalațiile de cazane, energia termică transmisă prin conductibilitate de la sudura caldă spre cea rece și care constituie o pierdere de energie pentru baterie, reprezintă energie termică utilă pentru țevile ecran din focarul cazanului pe care sînt plasate acestea în instalație [1]. Pentru instalația de cazane, bateria termoelectrică va constitui un element cu randament apropiat de unitate, condiționat numai de pierderile prin efect Peltier, deoarece energia termică transmisă prin conductibilitate reprezintă pierderea cea mai importantă în bilanțul de energie aplicat bateriei termoelectrice, iar pierderile prin efect Joule se recuperează în instalație; jumătate se transmite sursei calde iar jumătate sursei reci (respectiv, țevilor ecran).

Avînd în vedere randamentul bateriilor termoelectrice folosite ca treaptă înaintașă de energie, pentru execuția bateriilor termoelectrice pot fi folosite atît cuple din semiconductori, cît și cuple din metale.

Pentru a stabili condițiile tehnico-economice optime de realizare a bateriilor termoelectrice, s-au dedus relațiile prețului de cost, indicelui de greutate și energiei debitate pe unitatea de suprafață ocupată de termobaterie în focar.

Relațiile indicilor tehnico-economici au fost deduse pentru energia maximă debitată de termobaterie, considerînd numai materialul activ al termoelementului din baterie.

Energia electrică utilă debitată de termobaterie este dată de relația :

$$W = \frac{N\alpha^2(T_1 - T_2)^2}{r} \frac{m}{(m+1)^2}, \tag{1}$$

în care : N reprezintă numărul de termocuple legate în serie ; α — coeficientul lui S e e b e k ; m — raportul dintre rezistenţa exterioară R (sarcina bateriei) şi rezistenţa internă a termobateriei Nr, $m = R/(Nr)$; r — rezistenţa unui termoelement ; T_1 şi T_2 — temperaturile sudurii calde şi reci ale termobateriei.

Energia maximă dabitată de termobaterie se obţine pentru $m = 1$, adică pentru cazul cînd sarcina termobateriei este egală cu rezistenţa internă a acesteia ($R = Nr$)

$$W_{max} = \frac{N\alpha^2(T_1 - T_2)^2}{4r}. \tag{2}$$

Costul pe unitatea de energie maximă debitată de termobaterie este dat de relaţia :

$$c = \left[\frac{2}{\alpha}\frac{\lambda}{q}(\sqrt{\rho_1\gamma_1 c_1} + \sqrt{\rho_2\gamma_2 c_2})\right]^2 \quad \text{[lei/watt]}, \tag{3}$$

în care : c_1 şi c_2 reprezintă costul pe unitatea de greutate a materialului activ, [lei/kg] ; ρ_1 şi ρ_2 — rezistivitatea electrică a materialului activ ; γ_1 şi γ_2 — greutatea specifică ; λ — conductibilitatea termică a termoelementului ; α — coeficientului lui S e e b e k ; q — densitatea fluxului de căldură ce trece prin conductibilitate prin termoelement.

Indicele de greutate al termobateriei este dat de

$$g = \left[\frac{2}{\alpha}\frac{\lambda}{q}(\sqrt{\rho_1\gamma_1} + \sqrt{\rho_2\gamma_2})\right]^2 \quad \text{[kg/watt]}, \tag{4}$$

iar energia pe unitatea de suprafaţă utilă este dată de relaţia :

$$w = \left[\frac{\alpha}{2(\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2})}\right]^2 \frac{q}{\lambda}(T_1 - T_2) \quad \text{[watt/m}^2\text{]}. \tag{5}$$

Din (3) şi (4) se observă că, costul unitar şi indicele de greutate al materialului termoelementului sînt invers proporţionali cu pătratul densităţii fluxului de căldură ce trece prin termoelement, iar energia debitată pe unitatea de suprafaţă utilă este direct proporţională cu densitatea fluxului de căldură. Pentru ca indicele de greutate şi costul unitar să fie cît mai mici, iar energia debitată pe unitatea de suprafaţă să fie cît mai mare, este necesar ca încărcarea termică pe termoelement să fie cît mai mare.

Pentru compararea indicilor tehnico-economici s-au luat în studiu atît semiconductorii ce se pot realiza cu materii prime din ţară [3], [4], [5] cît şi metalele.

În tabelul 1 s-au calculat indicii tehnico-economici pentru cuplul $PbTe_n$—$PbTe_p$, iar în tabelul 2 s-au calculat indicii tehnico-economici pentru cuplul Ni—Fe.

Pentru costul unitar al cuplului $PbTe_n$—$PbTe_p$ s-au luat conform indicațiilor din literatura de specialitate $c_1 = c_2 = 1\,000$ lei/kg. Această valoare se va micșora în viitor odată cu perfecționarea tehnologiei de fabricație a acestor semiconductoare în R. S. R.

Tabelul 1

Cuplul $PbTe_n$ — $PbTe_p$

q kcal/m²h	lei/watt	watt/m²	kg/watt
25 000	455	2 350	0,384
30 000	315	2 800	0,215
50 000	114	4 700	0,095
75 000	51	7 050	0,042
100 000	28,5	9 400	0,023
150 000	12,5	14 000	0,010
200 000	7,15	19 800	0,004
300 000	3,15	28 000	0,002

Tabelul 2

Cuplul Ni — Fe

q kcal/m²h	lei/watt	watt/m²	kg/watt
25 000	720	270	24
30 000	530	310	16
50 000	190	535	5,75
75 000	85	805	2,55
100 000	48	1 070	1,44
150 000	21,5	1 600	0,64
200 000	12	2 150	0,36
300 000	5,3	3 210	0,167

Din analiza tabelelor se pot trage următoarele concluzii:

1. Toți indicii tehnico-economici sînt mai avantajoși în cazul cînd termoelementele sînt confecționate din semiconductori. Astfel, dacă se analizează datele pentru aceeași densitate de flux termic, costul unitar al bateriilor termoelectrice constituite din cupluri PbTe, este de 1,6 ori mai mic decît în cazul bateriilor confecționate din cuplul Ni—Fe, energia

debitată pe unitatea de suprafață de 8 ori mai mare, iar greutatea termobateriei este de aproximativ 60 ori mai mică decît în cazul cuplului Ni—Fe.

2. Cu cît densitatea fluxului de căldură este mai mare, cu atît indicii tehnico-economici devin mai avantajoși. Astfel, dacă se analizează datele pentru cuplul Pb—Te costul pe unitatea de energie debitată scade de la 455 lei/watt, în cazul unei densități a fluxului de căldură de 25 000 kcal/m²h, la 3,15 lei/watt, în cazul unei densități a fluxului de căldură de 300 000 kcal/m²h, energia debitată pe unitatea de suprafață crește de 12 ori, iar greutatea scade de 150 ori între aceleași limite de comparație a densității fluxului de căldură.

În studiul efectuat, densitatea fluxului de căldură luată în calcule corespunde densității fluxului de căldură transmis prin radiație în cazan (valori recomandate de literatura de specialitate [8] pentru diferite tipuri de cazane din țară și străinătate) și care este egală cu densitatea fluxului de căldură transmis prin conductibiltate în termoelement. În soluția constructivă a bateriilor termoelectrice se poate profila termoelementul, astfel încît densitatea fluxului termic ce trece prin conductibilitate să fie mult mai mare decît fluxul termic transmis prin radiație de la flacără la plăcile de radiație ale termoelementului. În stadiul actual de realizare a semiconductorilor din țara noastră [3], procesul tehnologic nu permite profilarea acestor termoelemente. Profilarea se poate realiza cu destulă ușurință în cazul metalelor. Avînd în vedere această observație, pînă la producerea pe scară industrială a semiconductorilor pentru termocuple, se pot executa termoelemente din metal care să atingă performanțele intrinseci ale semiconductorilor.

Relațiile de calcul ale indicilor tehnico-economici vor trebui afectate de unul sau doi termeni ce vor ține seama de materialul de legătură al termoelementului, izolația termică și electrică, precum și de manopera necesară pentru executarea termobateriei.

Relația costului unitar va fi, în acest caz :

$$c = \left[\frac{2}{\alpha}\frac{\lambda}{q}\left(\sqrt{\rho_1\gamma_1 c_1} + \sqrt{\rho_2\gamma_2 c_2}\right)\right]^2 + \frac{k_1}{q} + k_2 q \quad \text{[lei/watt]}, \tag{6}$$

în care k_1 reprezintă un coeficient ce ține seama de prețul de cost al materialului de legătură și al izolației termice și electrice ; k_2 — un coeficient care ține seama de cheltuielile privind manopera.

Indicele de greutate este

$$g = \left[\frac{2}{\alpha}\frac{\lambda}{q}\left(\sqrt{\rho_1\gamma_1} + \sqrt{\rho_2\gamma_2}\right)\right]^2 + \frac{k_3}{q} \quad \text{[kg/watt]}, \tag{7}$$

în care k_3 reprezintă un coeficient ce ține seama de majorarea greutății termoelementului datorită materialului de legătură și izolației electrice.

De asemenea, puterea pe unitatea de suprafață se calculează cu :

$$(8) \qquad w = \left[\frac{\alpha}{2(\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2})}\right]^2 \frac{q}{\lambda}(T_1 - T_2) - \frac{k_4}{q} \qquad [\text{watt/m}^2],$$

în care k_4 este un coeficient care ține seama de materialul de legătură.

Coeficienții k_1, k_2, k_3, k_4, sînt variabili în timp în raport cu experiența ce se va căpăta în tehnologia de fabricație a termobateriei.

Concluzii

1. Toți indicii tehnico-economici sînt mai avantajoși la termoelementele executate din semiconductori decît la cei din metale, pentru același flux de căldură ce trece prin termobaterie.

2. Indicii tehnico-economici devin mai avantajoși cu cît densitatea fluxului de căldură ce trece prin conductibilitate prin termoelement este mai mare.

Primită la 5 aprilie 1971

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de termotehnică și mașini termice

BIBLIOGRAFIE

1. Lozonschi Gh., *Asupra unei noi posibilități de creștere a randamentului centralelor termoelectrice.* Bul. Inst. polit. Iași, XVII (XXI), *3—4*, s. IV (1971).
2. Иоффе А. Ф., *Полупроводниковые термоэлементы.* Изд. АН СССР, М.—Л., 1960.
3. Drimer D., *Contribuții la studiul tehnologiei de fabricație a termoelementelor semiconductoare pe bază de materii prime din R. S. R.*, Teză de doctorat, Buc.
4. Gîdea S. și colab., *Metalurgia fizică a semiconductorilor.* Ed. Acad. R. S. R., Buc., 1966.
5. Drimer D. și colab., *Termoelectrogeneratoare pe bază de compuși intermetalici semiconductori.* Consfătuirea privind semiconductorii și aplicațiile lor, Acad. R. S. R., 1959.
6. Drimer D., și colab., *Tehnologia materialelor și dispozitivelor semiconductoare.* Conferința C. O. S., Buc., 1960.
7. Drimer D., *Aspecte din metalurgia semiconductorilor.* Com. ASIT, Buc., 1969.
8. Gheorghiu S., *Cazane de abur.* EDP, Buc., 1966.

ÉTUDE COMPARÉE DES THERMO-ÉLÉMENTS QUI PEUVENT ÊTRE UTILISÉES COMME ÉTAGE ÉNERGÉTIQUE POUR L'AMÉLIORATION DU RENDEMENT DES CENTRALES THERMIQUES

(Résumé)

Les indices techno-économiques des batteries thermoélectriques, dans l'hypothèse qu'elles sont organisées pour avoir comme source de chauffage un foyer et comme source froide les surfaces chauffées d'une chaudière, sont meilleurs pour les thermoéléments aux sémiconducteurs que pour ceux exécutés avec des métaux, pour la même valeur du flux de chaleur qui les traversent.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. C. 536.5

LOW PRESSURE WET STEAM ENTHALPYMETER

BY

DAN URSESCU and VICTOR ZUBCU

1. Introduction

Wet steam enthalpy is usually determined by two methods : (1) the calorimetric method, by making thermal balance after the condensation of steam in water, and (2) the steam throttling method, by passing wet steam to the superheated domain, in which does not exist the pressure-temperature indetermination, which is characteristic to the wet steam.

Both methods are inapplicable when steam pressures are smaller than the atmospheric one, since both of them need steam drowing off. In addition, the steam throttling method has a supplimentary disadvantage, namely the necessity of large enough pressure drop compared to atmospheric pressure so that, the steam passes to the superheated domain.

2. The Proposed Method

2.1. Working Principle

In this paper a new enthalpymeter is presented, which eliminates the aforesaid disadvantages. The new enthalpymeter works as follows (Fig. 1) : the wet steam is superheated at constant pressure, in two succe-

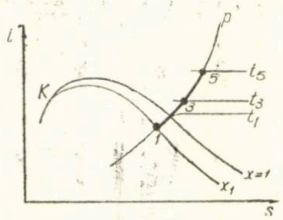


Fig. 1

ssive steps, by means of two heaters; the steam passes to the superheated domain from the very first heating.

The two heat quantities received by the steam during superheating are :

$$W_{1-3} = d(i_3 - i_1), \tag{1}$$

$$W_{3-5} = d(i_5 - i_3), \tag{2}$$

in which : d — superheated steam flow; p, t_1, i_1 — wet steam parameters ; p, t_3, i_3 — steam parameters after the first superheating ; p, t_5, i_5 — steam parameters after the second superheating.

From the ratio of Eq. (1) to Eq. (2) the wet steam enthalpy can be obtained

$$i_1 = i_3 - \frac{W_{1-3}}{W_{3-5}}(i_5 - i_3), \tag{3}$$

where W_{1-3} and W_{3-5} can be meassured and i_3 and i_5 can be found in thermal tables.

The case

$$W_{1-3} = W_{3-5} \tag{4}$$

is an interesting one since a very simple equation for wet enthalpy can be obtained

$$i_1 = 2i_3 - i_5. \tag{5}$$

The necessity of meassuring the heat quantities received by the steam is eliminated since it is enough to know the superheated steam enthalpies i_3 and i_5. Thus, it is only necessary to meassure pressure p and temperatures t_3 and t_5.

2.2. Principle Schema

Fig. 2 shows the utilisation of the enthalpymeter to investigate parameters of wet steam flowing through a pipe. In any other case the device is used in the same way.

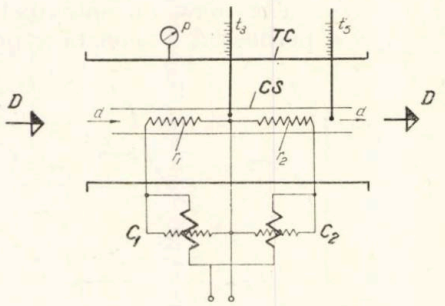


Fig. 2

In the steam pipe portion TC a heat insulated pipe CS is mounted ; two electrical heaters r_1 and r_2 are introduced in the latter. The electricmeters C_1 and C_2 meassure heat quantities W_{1-3} and W_{3-5} received by the steam. The pressure p and temperatures t_3 and t_5 must also be meassured.

If the simplified Eq. (5) is used, the diagram shown in Fig. 2 must be altered : the electrical heaters r_1 and r_2 must be series connected. Then, if resistances of the two electrical heaters are equal, the heat quantities W_{1-3} and W_{3-5} are equal too, and their meassuring becomes useless.

Evidently, the main conditions to be met by a low pressure wet steam enthalpymeter are :

1. The steam has to pass from wet state to superheated state during the first superheating.

2. The steam flow d, through CS, to be as small as possible and electrical resistances r_1 and r_2 as well. This will lead to a small amount of electrical energy consumed for superheating. At the same time we have to have high enough temperatures t_3 and t_5, as to be able to find enthalpies i_3 and i_5, in the thermal tables, with sufficient accuracy.

3. The two electrical resistances must be equal within the range of team temperatures in the enthalpymeter.

3. Experimental Investigations

In order to verify aforesaid working principle, an enthalpymeter has been designed and mounted in the installation shown in Fig. 3, where :

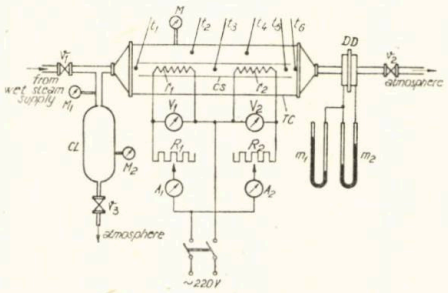


Fig. 3

TC — steam pipe ; CS — steam superheaters ; CL — steam throttling device ; DD — orifice plate ; M, M_1, M_2 — pressure gauges ; R_1, R_2 — current control rheostats ; A_1, A_2 — ammeters ; V_1, V_2 — voltmeters ; v_1, v_2 — steam valves ; v_3 — steam valve for controlling pressure level in enthalpymeter ; m_1, m_2 — mercury manometers ; r_1, r_2 — electrical heaters ; t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 — mercury-in-glass thermometers.

The purpose of the experimental investigations was to verify enthalpymeter work. The two electrical heaters r_1 and r_2 have unequal resistances.

and they are paralel connected. The heat quantities W_{1-3} and W_{3-5}, transfered to the steam are meassured by using ammeters A_1 and A_2 and voltmeters V_1 and V_2.

In the first series of experiments the enthalpy of wet steam obtained from the laboratory steam supply was determined, using the designed enthalpymeter, at several pressures. The experimental results are presented in Fig. 4 and Fig. 5 : the enthalpy of wet steam entering the enthalpymeter

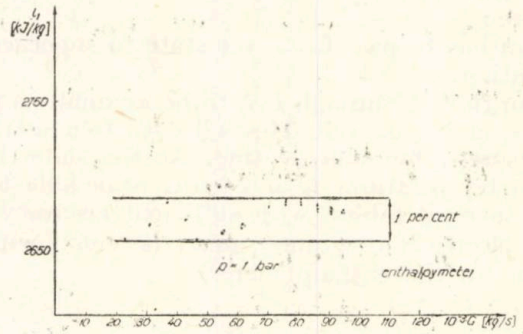


Fig. 4

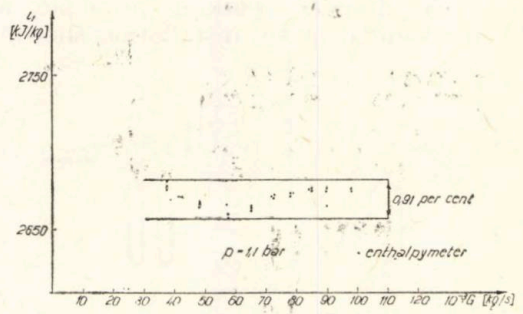


Fig. 5

as function of the whole steam flow D. The variation of steam enthalpy lies within 1 per cent.

At the operating presssure 1.4 bar the steam enthalpy was determined both by means of the designed enthalpymeter and by means of steam throttling device. As Fig. 6 shows, the variation of wet steam enthalpy meassured by using the two above mentioned methods lies within 2 per cent.

The most certain values for enthalpy are those found in thermal tables, but they are available only for superheated steam domain. For this

reason, in order to assess the accuracy, the enthalpymeter was verified in the superheated steam domain. Fig. 7 and Fig. 8 represent the meassurements of the superheated steam enthalpy at the input of the enthalpymeter by aid of thermal tables, the enthalpymeter itself, and the steam throttling device. All the meassured values lie within 2 per cent.

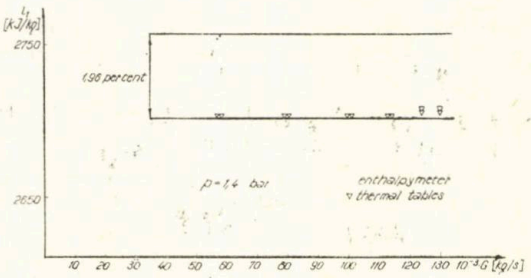


Fig. 6

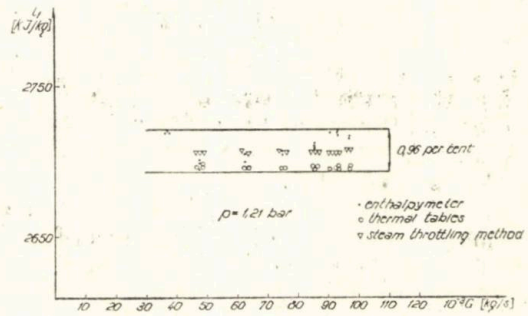


Fig. 7

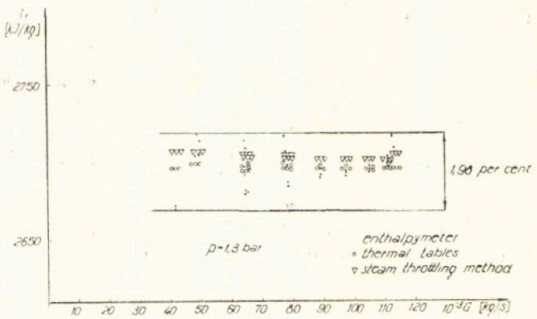


Fig. 8

There are differences between steam enthalpy meassurements for lack of heat insulating of the pipe *CS*. The influence of lack of insulation on experimental results is not and cannot be very important. It stems from the fact that, as it can be seen from Eq. (4), the two heat quantities W_{1-3} and W_{3-5} form a ratio and the heat losses are approximately proportional to the heat quantities. Consequently, this ratio remains approximately constant.

In order to assess heat losses from the superheated steam flowing through *CS* to the steeam flowing around *CS*, temperatures t_2, t_4 and t_6 were meassured. By using these temperatures the assumed proportionality of heat losses to heat quantities W_{1-3} and W_{3-5} was verified.

The pressure drop along the pipes *TC* and *CS* was meassured by aid of mercury manometers, in several points. The drop pressure between the two ends was only a few mmHg, that is the assumption that superheating takes place at a constant pressure is valid.

4. Conclusions

The low pressure wet steam enthalpymeter operating on the principle of superheating at constant pressure, in two steps, can be usable to steam enthalpy determination when a sufficient pressure drop for using steam throttling method does not exist, or drawing off the steam is not allowed because of the change of its parameters.

Therefore, a suitable designed enthalpymeter can be used for steam parameters determination at low pressure bleedings of turbine or in exhaust steam pipe from the turbine to condenser.

In order to prevent heat losses the heater pipe should be made of a heat insulating material and the difference between steam temperatures inside heaters and outside them should be as small as possible.

The authors intend to design an enthalpymeter of this kind, useful in thermal power stations.

Received July 10, 1971

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Thermotechnics

ENTALPMETRU PENTRU ABUR UMED DE JOASĂ PRESIUNE

(Rezumat)

Se prezintă o nouă metodă de măsurare a entalpiei aburului umed de joasă presiune.

Principiul noului entalpmetru constă în supraîncălzirea unei fracțiuni din debitul de abur la presiune constantă, în două trepte, utilizînd încălzitoare electrice.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.49.01

EFECTUL VARIAȚIEI RAPORTULUI DE COMPRESIE ASUPRA ARDERII DETONANTE ÎN MOTOARELE CU APRINDERE PRIN SCÎNTEIE

DE

DAVID PERETZ

1. Introducere

Este cunoscut din practică faptul că, prin creșterea raportului de compresie la m.a.s., arderea normală poate fi asigurată numai prin utilizarea unor combustibili cu C.O. mai mare, în cazul cînd celelalte condiții de lucru rămîn neschimbate. În fond fenomenul se explică prin aceea că creșterea raportului de compresie duce la deplasarea spre valori mai mari a regimului de presiuni și temperaturi la care este supus amestecul final și care, la rîndul lor, accelerează reacția de predetonație din acest amestec.

Pentru interpretarea influenței presiunii și temperaturii în motor asupra duratei de întîrziere la autoaprindere a unui amestec de combustibil-aer, s-au propus diferite scheme de lucru, care însă admit în general că compresia amestecului final ar fi izentropică, ceea ce, însă, nu corespunde realității [1], [2].

În prezenta lucrare se studiază influența raportului de compresie asupra evoluției reacției de predetonație din amestecul final, în baza unui model fenomenologic al detonației elaborat anterior [3]...[5].

Modelul admite că în amestecul final se petrece o reacție în lanț ramificată, care se sfîrșește în momentul în care s-a atins o anumită viteză, viteza critică. Funcția respectivă posedă două mărimi caracteristice : exponentul cinetic m al reacției de predetonație și durata reacției τ_{aa}. Exponentul cinetic, la rîndul său, poate fi redat printr-un raport adimensional de timp $\frac{t_0}{\tau_{aa}}$, t_0 reprezentînd momentul începerii unei reacții sensibile. Cercetările impun executarea unei instalații experimentale special adaptate acestui scop, pentru măsurarea cît mai precisă a intervalelor de timp respective, cît și a unei metodici adecvate [6].

2. Rezultatele cercetării

Pentru cercetări s-a utilizat monocilindrul IT—9—2, la o turație de 900 ± 10 rot/min ; combustibilul care prezintă arderea detonantă a fost *n*-heptanul, cel de referință izooctanul ; raportul de compresie ε a variat între limitele 4,0...6, la un coeficient al excesului de aer $\lambda = 0{,}85$; temperatura de intrare a amestecului s-a menținut la 149 ± 1°C.

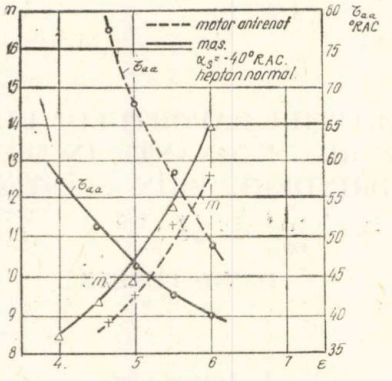


Fig. 1

În prima serie de experiențe, avansul la aprindere s-a menținut constant la $\alpha_s = -40°$ RAC, rezultatele experimentale fiind redate în fig. 1. Se observă că, odată cu creșterea raportului de compresie, durata reacției de predetonație scade, iar exponentul cinetic capătă valori mai mari. Cu alte cuvinte, valorile raportului de compresie determină intensificarea sau frînarea reacției de predetonație din amestecul final.

Se remarcă de asemenea că viteza critică a reacției de predetonație (fig. 2), crește odată cu raportul de compresie și prezintă o variație similară cu cea a intensității detonației în funcție de ε.

În analiza desfășurării reacției de predetonație în funcție de raportul de compresie, variația momentului t_0 de începere a unei reacții sensibile, cît și a duratei fazei principale ($\tau_{aa} - t_0$) prezintă un interes deosebit. Din fig. 3 se observă că la avansul ales de — 40°RAC, începutul reacției se deplasează spre valori mai mici odată cu creșterea raportului de compresie ; o variație similară dar mult mai rapidă se evidențiază și pentru durata fazei principale. Observațiile făcute confirmă deci faptul că mărirea raportului de compresie are ca efect accelerarea sensibilă a reacției de predetonație, cînd nu se modifică celelalte condiții experimentale.

În continuare, se prezintă un alt aspect interesant pentru caracterizarea influenței raportului de compresie asupra arderii detonante. Astfel, în experiențele menționate, avansul la aprindere prin scînteie de — 40°RAC sau $t_s = 20°$RAC, a fost întotdeauna mai mic decît momentul t_0, respectiv reacția sensibilă începe pentru aceste cazuri după producerea scînteii. Se

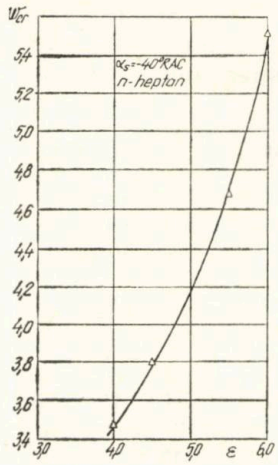


Fig. 2

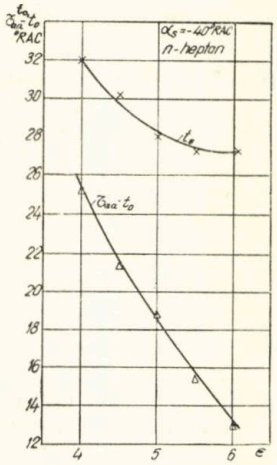


Fig. 3

pune problema în ce măsură reducerea acestui avans la aprindere poate influența evoluția reacției de predetonație, cînd variază raportul de compresie.

În acest scop s-au efectuat experiențe cu n-heptan la $\varepsilon = 4{,}0...6$, dar la avansuri diferite. În tabelul 1 se prezintă unele valori experimentale comparative pentru exponentul cinetic și durata reacției de predetonație, la $\varepsilon = 6$, combustibilul cercetat fiind n-heptanul.

Tabelul 1

Nr. exp.	Avans la aprindere d_s °RAC	Durata pînă la producerea scînteii t_s °RAC	Începerea reacției sensibile t_0 °RAC	Durata reacției τ_{aa} °RAC	Durata fazei principale $\tau_{aa} - t_0$ °RAC	Exponent cinetic m
1	−40	20	27,5	40,5	13,0	14,0
2	−24	36	32,0	48,7	16,7	12,8
3	0	36	32,0	49,0	17,1	12,6
4	f. apr.	f. apr.	32,0	49,3	17,3	12,5

Se observă că pentru $\alpha_s = -24$°RAC, respectiv $t_s = 36$°RAC de exemplu, reacția de predetonație începe înainte de momentul producerii scînteii. Reacțiile care se petrec la astfel de avansuri la aprindere mici, evoluează aproape similar cu cele din motorul antrenat, ceea ce demonstrează că reducerea avansului pentru evitarea detonației este eficace pînă la valori caracteristice autoaprinderii în motorul antrenat.

Desigur că în cazul unui avans dat, constant, de exemplu apropiat de cel optim (celelalte condiții rămînînd nemodificate), evitarea detonației se va putea realiza numai prin folosirea unui combustibil cu C.O. mai mare.

3. Concluzii

1. Influența raportului de compresie asupra reacției de predetonație în m. a .s. este similară cu cea din motoarele antrenate. Creșterea raportului de compresie duce la valori mai mari ale exponentului cinetic și scurtează durata reacției.

2. Viteza critică a reacției de predetonație prezintă o variație asemănătoare cu cea a intensității detonației, cînd se modifică raportul de compresie.

3. La rapoarte de compresie pentru care reacția sensibilă începe după producerea scînteii, micșorarea avansului la aprindere este utilă în vederea evitării detonației. În caz contrar, variația avansului influențează foarte puțin reacția de predetonație care se desfășoară aproximativ la fel ca și în motorul antrenat.

Primită la 5 aprilie 1971

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de termotehnică și mașini termice

BIBLIOGRAFIE

1. Löhner K., Müller H., *Gemischbildung und Verbrennung im Ottomotor.* List Verbrennungskraftmaschinen, **6**, Springer Verlag, Wien – New York, 1967.
2. Oetting H., *Beitrag zur Erscheinung des Klopfens in Ottomotoren.* Dissertation, TU Braunschweig, 1968.
3. Peretz D., *Über ein Modell der klopfenden Verbrennung in Ottomotoren.* Bul. Inst. polit. Iași, **XIV (XVIII)**, *1–2* (1968).
4. Peretz D., *Kinetische Gleichungen für Vorreaktionen im Ladungsrest bei klopfender Verbrennung in Ottomotoren.* Bul. Inst. polit. Iași, **XV (XIX)**, *1–2* (1969).
5. Peretz D., *Die Korrelation zwischen den kritischen thermodynamischen Grössen und der Vorreaktion im Ladungsrest bei klopfender Verbrennung in Ottomotoren.* Bul. Inst. polit. Iași, **XV (XIX)**, *3–4* (1969).
6. Peretz D., Ghibu C., *Instalație și metodică experimentală pentru studiul detonației în motoarele cu aprindere prin scînteie și în motoarele antrenate.* Constr. de mașini, **XXIII**, *2* (1971).
7. Peretz D., *Evoluția procesului de autoaprindere în motoare antrenate la rapoarte de compresie diferite.* Bul. Inst. polit. Iași, **XVII (XXI)**, *3–4*, s. IV (1971).

EINFLUSS DES KOMPRESSIONSVERHÄLTNISSES AUF DEN VERLAUF DER KLOPFENDEN VERBRENNUNG IN OTTOMOTOREN

(Zusammenfassung)

Die Versuche wurden mit einem Einzylinderprüfmotor (IT – 9 – 2) gefahren. Als Prüfkraftstoff diente reiner *n*-Heptan. Der Zündzeitpunkt wurde zwischen –40°KW bis zum o. T. verändert, das Kompressionsverhältnis ε von 4,0 bis 6,0.

Für den Zündzeitpunkt von $-40°$ KW sind die Ergebnisse in den Abb. 1, 2 und 3 dargestellt und zeigen, dass gleichzeitig mit dem Kompressionsverhältnis der kinetische Exponent grösser wird und die Dauer der Vorreaktion sich verkürzt. Die kritische Reaktionsgeschwindigkeit (Abb. 2), als Funktion von ε zeigt einen der Klopfstärke ähnlichen Verlauf an.

Für Kompressionsverhältnisse bei welchen eine wahrnehmbare Reaktion nach dem Zündzeitpunkt beginnt, sind kleinere Werte der Vorzündung nützlich, da sie es ermöglichen, das Klopfen zu vermeiden. Im entgegengesetzten Fall haben die Vorzündungswerte nur einen kleinen Einfluss; die Vorreaktion verläuft beinahe wie im fremdangetriebenem Motor.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 621.43.01

LES PROPRIÉTÉS COMMUNES DES CENTRES THERMODYNAMIQUES APPARTENANT AUX CYCLES THÉORIQUES FONDAMENTAUX ET LA RELATION DE LIAISON ENTRE LES PARAMÈTRES DE CES CENTRES

PAR

EMIL GAIGINSCHI, MARCEL GUTMAN et M. POPESCU

Comme on l'a déjà démontré dans un ouvrage antérieur [1], pour chaque cycle théorique fondamental des moteurs à combustion interne, il y a un point d'état situé à l'intérieur du cycle, qui a des propriétés différentes et qu'on appelle conventionnellement *centre thermodynamique.*

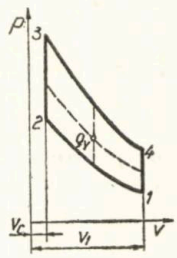


Fig. 1

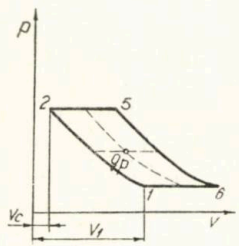


Fig. 2

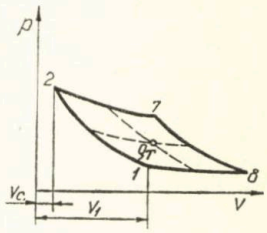


Fig. 3

On suppose que dans chaque cycle théorique fondamental représenté par les fig. 1, 2 et 3, avec une introduction de chaleur à un volume constant, pression constante et respectivement à une température constante, évolue 1 kg de fluide parfait.

On introduit les notations : p — pression [N/m²] ; v — volume spécifique [m³/kg] ; T — température [°K] ; $\varepsilon = \frac{v_1}{v_2}$ — degré de compres-

sion du cycle ; $\lambda = \frac{p_3}{p_2}$ — degré d'augmentation de la pression pour le cycle isochore ; $\delta = \frac{T_5}{T_2}$ — degré d'augmentation de la température pour le cycle isobare ; $\beta = \frac{v_7}{v_2}$ — degré partiel sous lequel on effectue la détente isotherme pour le cycle isotherme ; K — exposant adiabatique u — énergie interne [J].

Analysant par la suite les expressions des paramètres (p_g, v_g et T_g) du centre thermodynamique pour les cycles isochore, isobare et isotherme, en se rapportant aux paramètres initials p_1, v_1, T_1 et au degré de compression ε et faisant les substitutions :

$$p_1\left(\frac{\varepsilon^{K+1}+1}{2}\right)^{\frac{K}{K-1}} = C, \qquad \frac{v_1 2^{\frac{1}{K-1}}}{(\varepsilon^{K-1}+1)^{\frac{1}{K-1}}} = D, \qquad \frac{1}{2} T_1(\varepsilon^{K-1}+1) = E,$$

on peut écrire ces paramètres de la manière suivante :

pour la cycle isotherme : $p_{g_T} = C\frac{1}{\sqrt{\beta}}$, $v_{g_T} = \sqrt{\beta}\, D$, $T_{g_T} = E$;

pour le cycle isochore : $p_{g_v} = \frac{\lambda+1}{2} C$, $v_{g_v} = D$, $T_{g_v} = \frac{\lambda+1}{2} E$;

pour le cycle isobare : $p_{g_p} = C$, $v_{g_p} = \frac{\delta+1}{2} D$, $T_{g_p} = \frac{\delta+1}{2} E$.

En ce qui concerne le cycle isochore et le cycle isobare, les paramètres du centre thermodynamique ont été établis dans les ouvrages antérieurs [1] et [2]. Le centre thermodynamique du cycle isotherme pour lequel on a écrit les paramètres mentionnés est le point d'état qui se trouve à l'intersection de l'adiabatique et de l'isotherme qui divise, chacune, l'aire du cycle en deux parties égales ; dans le diagramme $p-v$ il est représenté par le point g_T.

Si on analyse les propriétés des centres thermodynamiques des cycles isochore, isobare et isotherme, on constate qu'il y en a certaines propriétés communes. Ainsi on constate pour les cycles théoriques fondamentaux, l'existence des propriétés suivantes :

a) *L'énergie interne U_g du centre thermodynamique est égale à la moyenne arithmétique des énergies internes des sommets du cycle respectif* :

cycle isochore

$$(1) \qquad U_{g_v} = \frac{U_1 + U_2 + U_3 + U_4}{4} = \frac{\lambda+1}{2}\frac{p_1 v_1}{K-1}\frac{\varepsilon^{K-1}+1}{2};$$

cycle isobare

$$U_{g_p} = \frac{U_1 + U_2 + U_5 + U_1}{4} = \frac{\delta + 1}{2} \frac{p_1 v_1}{K-1} \frac{\varepsilon^{K-1} + 1}{2}; \tag{2}$$

cycle isotherme

$$U_{g_T} = \frac{U_1 + U_2 + U_7 + U_8}{4} = \frac{p_1 v_1}{K-1} \frac{\varepsilon^{K-1} + 1}{2}. \tag{3}$$

b) *Le produit $p_g v_g$ lui aussi est égal à la moyenne arithmétique des produits entre la pression et les volumes des sommets du cycle respectif*:

cycle isochore

$$p_{g_v} v_{g_v} = \frac{p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 + p_4 v_4}{4} = \frac{\lambda + 1}{2} \frac{\varepsilon^{K-1} + 1}{2} p_1 v_1; \tag{4}$$

cycle isobare

$$p_{g_p} v_{g_p} = \frac{p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_5 v_5 + p_6 v_6}{4} = \frac{\delta + 1}{2} \frac{\varepsilon^{K-1} + 1}{2} p_1 v_1; \tag{5}$$

cycle isotherme

$$p_{g_T} v_{g_T} = \frac{p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_7 v_7 + p_8 v_8}{4} = \frac{\varepsilon^{K-1} + 1}{2} p_1 v_1. \tag{6}$$

c) De cette propriété il en résulte que *la température absolue du centre thermodynamique du cycle est égale à la moyenne arithmétique des températures des sommets du cycle respectif*:

cycle isochore

$$T_{g_v} = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{4} = \frac{\lambda + 1}{2} \frac{\varepsilon^{K-1} + 1}{2} T_1; \tag{7}$$

cycle isobare

$$T_{g_p} = \frac{T_1 + T_2 + T_5 + T_6}{4} = \frac{\delta + 1}{2} \frac{\varepsilon^{K-1} + 1}{2} T_1; \tag{8}$$

cycle isotherme:

$$T_{g_T} = \frac{T_1 + T_2 + T_7 + T_8}{4} = \frac{\varepsilon^{K-1} + 1}{2} T_1. \tag{9}$$

Considérant les problèmes mentionnés ci-dessus et les conclusions qui s'en dégagent (de [1] et [2]) il résulte qu'il y a, en effet, une grande ressemblance entre les paramètres d'état et les propriétés des centres thermodynamiques appartenant aux cycles théoriques fondamentaux.

Dans ce but, si on applique l'équation spécifique caractéristique des gaz parfaits aux paramètres d'état (p_{g_T}, v_{g_T}, T_{g_T}) du centre thermodynamique du cycle isotherme, on peut écrire :

$$p_{g_T} v_{g_T} = RT_{g_T}, \tag{10}$$

où, ayant en vue les valeurs écrites ci-dessus, on obtient:

$$CD = RE = RT_{g_T}. \tag{11}$$

Si l'on tient compte que $p_{g_T} = C$ et $v_{g_v} = D$, on obtient donc la relation entre les paramètres des centres thermodynamiques appartenant aux cycles isobare, isochore et isotherme :

$$p_{g_p} v_{g_v} = p_{g_T} v_{g_T} = RT_{g_T}, \tag{12}$$

qui démontre que le produit de la pression du centre thermodynamique du cycle isobare et du volume spécifique du centre thermodynamique du cycle isochore est égal soit avec le produit du volume spécifique dans le centre thermodynamique du cycle isotherme, soit avec le produit de la constante spécifique du gaz R et de la température absolue dans le centre thermodynamique du cycle isotherme, dans le cas où les cycles ont le même degré de compression et les mêmes paramètres initiaux.

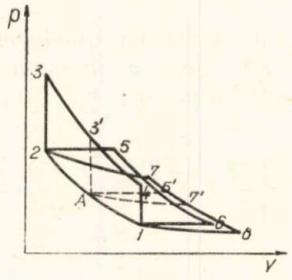


Fig. 4

On observe donc qu'il y a un point d'état sur la courbe de compression, noté par A dans la fig. 4, ayant les paramètres d'état p_{g_p}, v_{g_v}, T_{g_T} et qui a une propriété particulière parce que grâce à lui on a pu déterminer les paramètres des centres thermodynamiques appartenant aux cycles théoriques fondamentaux dans le cas où l'on connaît les paramètres initiaux ε, λ, δ et β.

Reçue le 5 juillet 1971

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Moteurs Thermiques

BIBLIOGRAPHIE

1. Gaiginschi E., Zugrăvel M., Gutman M., Bîrjoianu A., Bul. Inst. polit. Iași, VIII (XII), *1—2*, 321—332 (1962).
2. Gaiginschi E., Gutman M., Giurcă V., Bul. Inst. polit. Iași, XIII (XVII), *1—2*, 455—460 (1967).

PROPRIETĂȚILE COMUNE ALE CENTRELOR TERMODINAMICE APARȚINÎND CICLURILOR TEORETICE FUNDAMENTALE ȘI RELAȚIA DE LEGĂTURĂ ÎNTRE PARAMETRII ACESTOR CENTRE

(Rezumat)

Plecînd de la lucrările [1] și [2] se pun în evidență proprietățile comune ale ciclurilor teoretice fundamentale și se stabilește o relație de legătură între parametrii centrelor termodinamice ale ciclurilor izobar, izocor și izoterm. Relația denotă existența unui punct de stare pe curba de comprimare, (A în fig. 4), cu parametrii de stare p_{σ_p}, v_{σ_v} și T_{σ_T} care se bucură de proprietatea deosebită că permite determinarea parametrilor centrelor termodinamice ale ciclurilor teoretice fundamentale în cazul cînd se cunosc parametrii inițiali ε, λ, δ și β.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. K. 620.18

BEITRÄGE ZUM STUDIUM DER DURCH ANLASSEN EINGEFÜHRTEN VERÄNDERUNGEN, BEI DEM MAGNETISCHEN VERHALTEN DER VERBESSERUNGSSTÄHLE [1]

VON

TOMA FĂRCAŞ, C. PICOŞ, GH. ILIESCU, BOGDAN GHEORGHIU und VLADIMIR BURGARD

1. Vorwort

Mit Hilfe einer früher vorgezeigten Vorrichtung, konnte man die durch Anlassen aufgetretenen Veränderungen, bei dem magnetischen Verhalten der hochwertigen Kohlenstoffstähle verfolgen.

Die verwendete Meßvorrichtung ist sehr empfindlich. Die Messungen sind einfach und geschwind, Eigenschaften die ihn für die unzerstörende integrale Kontrolle einer warmbehandelten Werkstücke hinweisen.

2. Ziel der Arbeit

Mit Hilfe der in einer vorherigen Arbeit [1] vorgezeigten Vorrichtung, hat man die durch Anlassen hervorgerufenen Veränderungen bei dem magnetischen Verhalten der hochwertigen Kohlenstoffstähle (STAS 880—66) verfolgt.

Die vorher erwähnte magnetische Meßvorrichtung ist sehr empfindlich mit den durch Zerstreuung oder Phasenumwandlung erzeugten Gefügeveränderungen, während die Messungen an sich selbst sehr einfach und geschwind sind.

Die Wahl des Anlassens, als Wärmebehandlung, ist der Tatsache zu verdanken, daß obwohl sie sehr feine Gefügeveränderungen erzeugt,

---

[1] Mittgeteilt an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule Jassy, am 2—4 Juli 1970.

die die physisch-mechanische Eigenschaften der behandelten Stähle beeinflußt, können diese mit Hilfe der angewandten Vorrichtung erfaßt werden.

Die experimentellen Ergebnisse, erlauben eine Beziehung zwischen dem angewandten Anlaßregime und den magnetischen Eigenschaften einer gewissen Stahlarten festzustellen.

Offenbar, diese Ergebnisse hängen von den im angelassenen Stahl vorhandenen Spannungen ab ; Abhängigkeit von der Fachliteratur [2]...[5] einstimmig zugelassen.

3. Experimentelle Verfahren

Die Waltzstäbe, mit einem Durchmesser von 16 mm, wurden bei den aus dem Standard empfohlenen Temperaturen normalisiert.

Die Erhaltungsdauer im Ofen, wurde in Abhängigkeit von der Stahl marke, der Stärke des Halbfabrikates, des Ladungsgewichts sowie dem Ordnen der Ladung auf dem Ofenherd gewählt. Beim Erwärmen wurde ein Siemens-Plania Ofen mit Silitenstäbe am Gewälbe verwendet, während die Abkühlung der Halbfabrikate bei stiller Luft durchgeführt wurde.

Da, bei den für Normalisieren gewählten Temperaturen und Erhaltungsdauer, Oxydierungen und Entkohlungen bei den Metalloberflächen stattgefunden haben, wurde die Oberflächenschicht durch Drehen bis auf einen Durchmesser von 10 mm und einer Länge von 70 mm (Dimensionen die von der Meßvorrichtung vorgeschrieben sind) entfernt. Wir erinnern daß die magnetische Meßvorrichtung zugleich zwei Probekörper gebraucht, einer wird als Zeuge und der Zweite als Meßkörper verwendet.

Die erste Messung wurde auf normalisierte Probekörper gemacht, mit dem selben Probekörper als Zeuge für alle anderen Probekörper aus dem gleichen Stahl.

Beim Nachprüfen der Reproduktibilität der experimentellen Ergebnisse, wurden Messungen auch auf andere Probekörper als Zeuge, natürlich, aus dem selben Werkstoff, durchgeführt. So wurde festgestellt daß die Ergebnisse eine ziehmlich kleine Dispersion vorstellen, was uns erlaubt vorauszusetzen daß die durch Normalisieren erlangte Mikrostruktur uniform ist. Als Meßapparat wurde ein elektronisches Voltmeter, Typ Tesla B.M 289 mit einer Skala von 0 bis 300 V, verwendet.

Die zweite angewandte Wärmebehandlung der Probekörper war das Härten, laut den Empfohlungen aus dem früher erwähnten Standard durchgeführt. Die Probekörper wurden in dem selben Ofen wie bei dem Normalisieren erwärmt.

Die, nach dem Härten, durchgeführten magnetischen Messungen, hatten als Zeuge einer normalisierten Probekörper.

Am Ende wurde ein Anlassen ausgeführt, eine hauptsächliche Wärmebehandlung für das in der vorliegenden Arbeit verfolgte Ziel.

Beim Feststellen der Erhaltungsdauer wurde die Hinweisung „Stunde und Zoll“ berücksichtigt, auf Grund deren die häufigsten Diagrammen

konstruiert sind und welche den Verlauf der angelassenen Stahleigenschaften in Abhängigkeit der Anlaßtemperaturen geben.

Die vorliegende Arbeit vervolgt nur den Einfluß der Anlaßtemperaturen auf das Verhalten der Stähle aus dem magnetischen Gesichtspunkt angesehen, so daß die Erhaltungsdauer Konstant behalten worden sind. Für den Durchmesser der Probekörper von 10 mm und dem verwendeten Ofentyp hat man als genügend eine Erhaltungsdauer von einer Stunde betrachtet, um im Stahl die für die gewählten Temperaturen eigentümlichen Umwandlungen zu erzeugen.

Die Anlaßtemperaturen, von Hundert zu Hundert Grad, zwischen 100° und 600°C, sind in dem Ofen eines Dilatometers Bauart-Weiss erreicht worden, deren Konstruktion eine entsprechende Gleichförmigkeit und Genauigkeit der Erwärmung garantiert. Nur die Temperatur von 100°C, um eine höhere Genauigkeit und Gleichförmigkeit der Erwärmung zu erzielen, wurde in zum kochen gebrachte Wasser, gemacht.

Für jede Stufe der Anlaßtemperatur wurden drei Probekörper aus gleichem Stahl verwendet, da die Erfahrung gezeigt hat daß nicht eine größere Anzahl notwendig ist.

Über einige Probekörper sind Bemerkungen bezüglich der Mikrostruktur und den Härtemessungen gemacht worden, um daß Gelingen der Wärmebehandlung, insbesonders beim Härten, nachzuprüfen ; da die Härte einer der bedeutensten Faktoren die das Anlaßergebniß beeinflußt, darstellt.

4. Die experimentellen Ergebnisse

Die magnetische Messungen, auf den Probekörper in normalisiertem Zustand, stellen eine kleine Dispersion der am elektronischen Voltmeter abgelesenen Werte dar, während bei den gehärteten Probekörper die Dispersion der Ergebnisse noch kleiner ist.

Man kann beobachten daß die durch Messungen auf normalisierte, gehärtete, gehärtete und angelassene Probekörper, erhaltenen Spannungswerte sich nicht in eine beliebige Ordnung nach dem Kohlenstoffinhalt des Stahles setzen.

Die auf angelassenen Probekörper erhaltene experimentellen Ergebnisse sind in Abb. 1 grafisch dargestellt. Auf der Ordonate sind die mit dem Voltmeter gemessenen Spannungen, während in der Abszisse die Temperaturen in Grad-Celsius eingetragen.

Aus dieser Abbildung beobachtet man leicht daß alle, zu den untersuchten Stähle entsprechenden, Kurven durch ein Minimum, in der Temperaturzone zwischen 300° und 400°C ziehen, Minimum den wir „Senke der Durchschnittstemperaturen“ genannt habe. Die Kurven sind steiler zwischen 100° und 300°C angesichts von 400°C aufwärts.

Wir bemerken daß man die Kurven aus Abbildung 1 genauer ziehen könnte, wenn die Anlaßtemperaturenstufen kleiner sind ; z. B. von 50° zu 50°C, anstatt 100° zu 100°C.

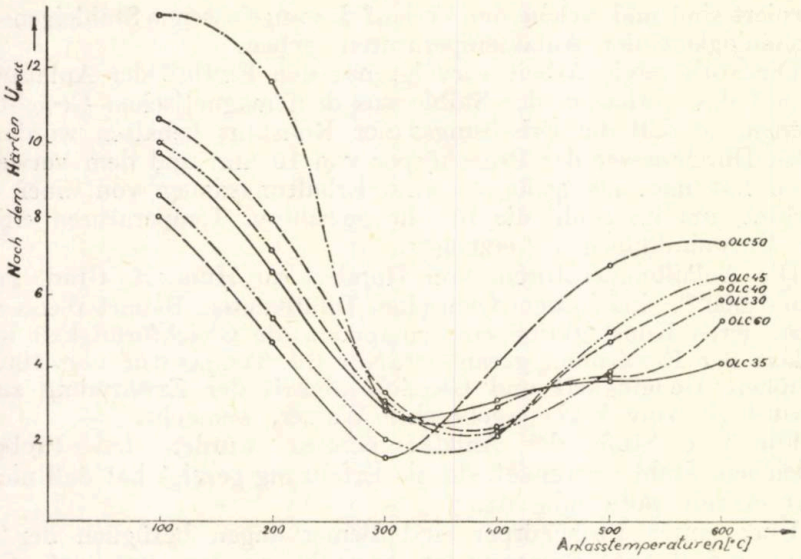


Abb. 1

5. Schlußfolgerungen

1. Die experimentellen Ergebnisse zeigen, daß die beim Anlassen erzeugten Umwandlungen, in den untersuchten Stählen, Veränderungen im magnetischen Verhalten verursachen.

2. Infolge der hohen Empfindlichkeit der magnetischen Meßvorrichtung, erlaubt diese daß man übersicht halten kann in sehr feine Vorgänge die das Anlassen begleiten.

3. Die Empfindlichkeit der Vorrichtung und Geschwindigkeit der Messungen machen die vorgezeigte Methode für eine integrale, unzerstörende Kontrolle einer warmbehandelten Werkstücke (z. B. Kugelrollenlager) sehr geeignet. Auch in den Fallen wo die metalographische Prüfung, bei üblichen Vergrößerungen nicht genügend genaue Hinweisungen gibt, wird die vorgezeigte Methode bevorzugt.

Eingegangen am 20. September 1971

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl von Technologie
des Maschinenbaus

BIBLIOGRAFIE

1. Fărcaş T. ş. a., *Un nou dispozitiv pentru determinarea pe cale magnetică a efectelor diferitelor tratamente termice la oţeluri.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XI (XV), *3 — 4* (1965).
2. Смиков А. А. *Справочник термиста.* Машгиз, М., 1961.
3. * * * *Металловедение и термическая обработка стали* (Справочник). Т. 1, Металлургиздат, М., 1962.

4. Guleaev A. P., *Tratamentul termic al oţelului* (trad. din l. rusă). Ed. tehn., Buc., 1962.
5. * * * *Metals Handbook*. Vol. 2, *Heat Treatment and Cleaning*. A. S. M., Ohio, 1964.

CONTRIBUŢII LA STUDIUL SCHIMBĂRILOR INTRODUSE PRIN REVENIRE, ÎN COMPORTAREA MAGNETICĂ A UNOR OŢELURI DE ÎMBUNĂTĂŢIRE

(Rezumat)

Folosindu-se un dispozitiv magnetic prezentat într-o lucrare anterioară, autorii procedează la măsurarea reluctanţei pe unele oţeluri carbon de îmbunătăţire, româneşti, călite şi apoi revenite în regimuri diferite.

Cu acest prilej este scoasă în evidenţă variaţia interesantă a reluctanţei cu temperatura de revenire, precum şi unele calităţi deosebite ale dispozitivului de măsură, cum sînt sensibilitatea şi operativitatea măsurătorilor, fapt pentru care poate fi folosit la controlul nedistructiv al unor fabricate din oţel.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D.K.620.18

DIE FORSCHUNG DER VERÄNDERUNGEN DER MIKROHÄRTE DER DURCH EINWALZEN MIT KUGELN GEHÄRTETEN OBERFLÄCHENSCHICHT, IM VERHÄLTNIS ZU DER ERWÄRMUNGSTEMPERATUR

VON

C. PICOŞ, CAZIMIR BOHOSIEVICI, OCTAVIAN PRUTEANU und V. BRAHA

1. Vorwort

Die Steigung der Dauerhaftigkeit der Maschinenelemente ist eine der bedeutensten Aufgabe welche in gleichem Maße sowohl die Bautechniker als auch die Technologen beschäftigt. Ein immer bedeutenderer Platz in den Arbeitsvorgängen der spanabhebenden Bearbeitung ist von den Oberflächenhärten der Maschinenelemente, im Zweck der Steigung der physikalisch-mechanischen Eigenschaften der Oberflächenschichten, besetzt.

Da man nach den Arbeitsvorgängen der mechanischen Bearbeitungen sehr verschiedene Eigenschaften der Oberflächenschicht erhält (Gefüge, Mikrohärte, innere Spannung) mit direktem Einfluß in der Ausbeutung, werden die Anwendungen der besten Härtemethoden erforscht, damit die Parameter der Oberflächenschicht für konkrete Funktionsbedingungen zwischen optimalen Werten liegen.

Aus den durchgefürten Forschungen [2], [3] kann man die Folgerung ziehen, daß die plastischen oberflächlichen Formänderungen der Maschinenelemente zum Steigen der Oberflächenschichthärte, verkleinern der Oberflächenrauheit und Steigen der Dauerfestigkeit und Korrosionswiederstandes führen.

In den vorigen Arbeiten [1], [2] haben wir uns mit dem Härten mit Kugeln der Oberflächen, sowie mit dessen Einfluß auf das Verhalten der Dauerfestigkeit beschäftigt.

---

[1]) Mittgeteilt an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule Jassy, am 4—6 Juli 1970.

Die vorliegende Arbeit bildet eine natürliche Folge unserer Beschäftigung auf diesem Gebiet.

Da es Maschinenelemente gibt die bei relativ hohen Temperaturen arbeiten, hat man mit den durchgefürten Forschungen die Ermittlung der Grenztemperatur, welche die Mikrohärte der durch einwalzen mit Kugeln gehärteten Oberflächenschicht unverändert läßt, verfolgt.

2. Experimenteller Teil

Bei den Versuchen hat man den Stahl OLC 45 (STAS 880—66), wie auch in den vorigen Arbeiten verwendet.

Vor der spanabhebenden Bearbeitung werden den Probekörpern mit $d = 13$ mm ein Homogenisierungsglühen bei 850°C und 15 Minuten lang mit Auskühlung im Ofen, angewendet. Das Glühen war wegen der großen Zerstreuung der Mikrohärte, die das Walzgut darbietet vorgeschrieben.

Die Zerspanung wurde durch Drehen mit folgendem Zerspanungsbetrieb ausgeführt: Schnittiefe $t = 1$ mm ; Vorschubsgröβe $s = 0{,}1$ mm/Dr; Schnittgeschwindigkeit $v = 19{,}6$ m/min (bei einer Drehzahl von $n = 480$ Dr/min) ; Durchgangszahl $n_{tr} = 1$.

Die erhaltenen Probekörper sind mit der in diesem Zweck erzeugten Vorrichtung [1] durch Einwalzen mit Kugeln gehärtet.

Beim Einwalzen hat man folgendes Regime verwendet : Einwalzkraft $P_{rul} = 20$, 40, 60 daN ; Einwalzvorschub $s_{rul} = 0{,}1$ mm/Dr ; Drehzahl $n = 480$ Dr/min ; Durchgangszahl $n_{tr} = 1$.

Die Mikrohärte aller Probekörper wurde nach dem Einwalzen und nach der Wärmebehandlung mit Hilfe eines Mikrohärtemeter PMT—3, abgemessen. Nach dem Einwalzen und Abmessen der Mikrohärte, waren die Serien von Probekörpern, für jede Einwalzkraft, einer Wärmebehandlung von 150°C ; 200°C ; 300°C ; 400°C, mit einer 4 stündlichen Temperaturaufrechterhaltung und einer Freiluftkühlung ausgesetzt.

Für jede Einwalzkraft und Erwärmungstemperatur sind zwei Probekörper verwendet werden.

Die Versuchsergebnisse, die ein arithmetisches Mittel, der gemessenen Mikrohärte darstellen, sind in der Tabelle 1, eingetragen.

Tabelle 1

Mikrohärte der Oberflächenschicht vor der Wärmebehandlung

Oberflächenabstand (mm)		0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
Mikrohärte	0	210	206	210	207,5	206	206	210,5	210,5
(MH) bei	20	262	245	224	215	210,5	210,5	210,5	210,5
Einwalzen	40	283	272	254	245	222,5	215	215	215
mit P	60	325	278	256	245	218	215	215	215

Tabelle 2

Mikrohärte der Oberflächenschicht für die gehärteten und auf $T = 150°C$ erwärmten Probekörper

Oberflächenabstand (mm)		0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
Mikrohärte (MH)	20	260	245	226	214	210,5	210,5	210,5	210,5
bei Einwalzen	40	276	264	250,4	239,6	225,5	210,5	210,5	210,5
mit P (daN)	60	325	270	250	224	218	210,5	210,5	210,5

Tabelle 3

Mikrohärte der Oberflächenschicht für die gehärteten und auf $T = 200°C$ erwärmten Probekörper

Oberflächenabstand (mm)		0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
Mikrohärte (MH)	20	260	245	228,5	225	210,5	210,5	210,5	210,5
bei Einwalzen	40	264	254	234,5	215	210,5	210,5	210,5	210,5
mit P (daN)	60	285,5	234,5	226	218	210,5	210,5	210,5	210,5

Tabelle 4

Mikrohärte der Oberflächenschicht für die gehärteten und auf $T = 300°C$ erwärmten Probekörper

Oberflächenabstand (mm)		0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
Mikrohärte (MH)	20	258	237	220	210,5	210,5	210,5	210,5	210,5
bei Einwalzen	40	264	245	228,5	215	210,5	210,5	210,5	210,5
mit P (daN)	60	304,5	239,6	225,5	218	215	210,5	210,5	210,5

Tabelle 5

Mikrohärte der Oberflächenschicht für die gehärteten und auf $T = 400°C$ erwärmten Probekörper

Oberflächenabstand (mm)		0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
Mikrohärte (MH)	20	219,5	225	218	210,5	210,5	210,5	210,5	210,5
bei Einwalzen	40	234,5	225,5	222,5	210,5	210,6	210,5	210,5	210,5
mit P (daN)	60	227	218	213	210,5	206	210,5	210,5	210,5

3. Diskussion

Die Forschungsergebnisse analysierend, kann man das Gespräch aus zwei Gerichtspunkten entwickeln :

1. Die Veränderung der Mikrohärte mit der Tiefe der gehärteten Schicht für eine konstante Temperatur (T = konst.) :

a) für gehärtete Maschinenteile vor der Wärmebehandlung (Tabelle 1), stellt man fest, daβ die Mikrohärte mit der Meβtiefe proportional fällt, der Kurvenansteig, der diese Veränderung der Mikrohärte darstellt, steigt mit der Einwalzkraft an, und die gehärtete Schicht ist etwa 0,3 mm dick (Abb. 1) ;

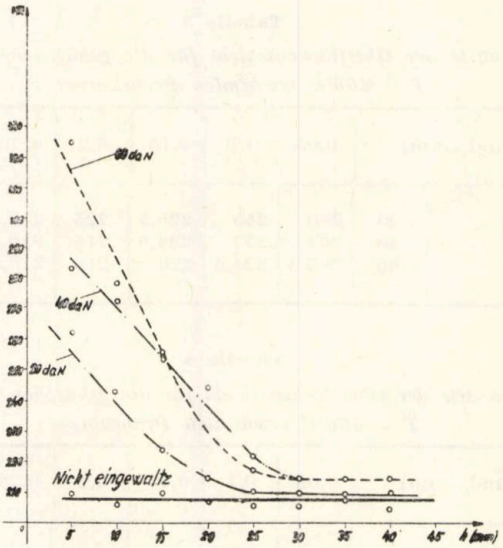


Abb. 1. — Der Mikrohärteverlauf bei nicht geglühten Probekörpern.

b) nach dem Härten und Erwärmen bis zu 150°C treten keine wesentlichen Veränderungen angesichts der unerwärmten Probekörper auf. Man bemerkt eine genaue Abgrenzung der Mikrohärtezonen in Abhängigkeit mit der Einwalzkraft (Abb. 2) ;

c) nach dem Härten und Erwärmen bis zu 200°C bemerkt man eine Verminderungsabsicht der Mikrohärte, besonders für die Einwalzkraft von 40 und 60 daN, eine Gruppierung der Mikrohärte sowie auch einen akzentuierten Abfall der Mikrohärte in den Oberflächenschichten für die 60 daN Kraft (bis zu 0,1...0,15 mm). Gleichfalls nimmt auch die oberflächlich gehärtete Oberflächenschicht von 0,3 mm bis etwa 0,25 mm ab (Abb. 3) ;

d) nach dem Härten und Erwärmen bis zu 300°C erhalten sich die gleichen Verärderungen wie bei der Temperatur von 200°C (Abb. 4) ;

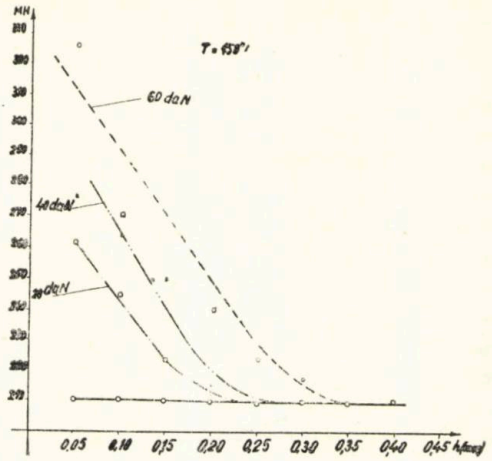


Abb. 2. — Der Mikrohärteverlauf für 4 stündlicher Glühung bei 150°C der Probekörper.

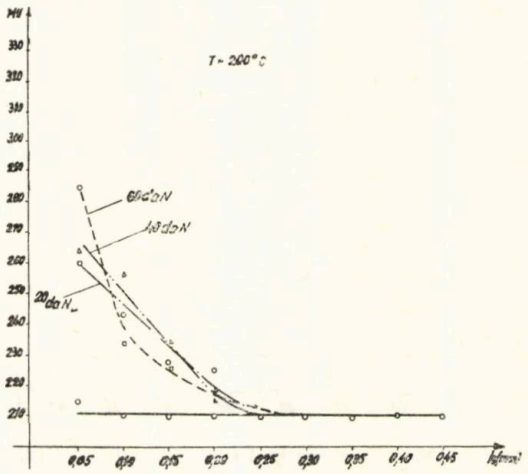


Abb. 3. — Der Mikrohärteverlauf für 4 stündlicher Glühung bei 200°C der Probekörper.

e) nach dem Härten und Erwärmen bis auf 400°C bemerkt man einen akzentuierten Abfall der Mikrohärte, besonders in den Oberflächenschichten der Maschinenteile (bis auf eine Tiefe von 0,1...0,15 mm). Die Stärke der noch gehärteten Schicht sinkt auf 0,15...0,2 mm, mit ziemlich kleinen Werten für die Mikrohärte. Bei der Einwalzkraft von 60 daN beobachtet man eine Verminderung der Mikrohärte um 30% (Abb. 5).

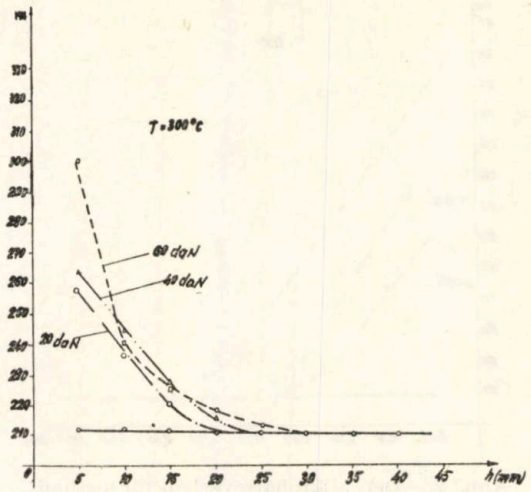


Abb. 4. — Mokrohärteverlauf für 4 stündliche Glühung bei 300°C der Probekörper.

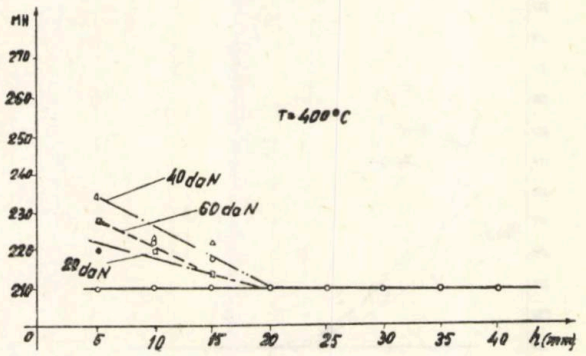


Abb. 5. — Mikrohärteverlauf für 4 stündliche Glühung bei 400°C der Probekörper.

2. Die Veränderung der Mikrohärte in Abhängigkeit von der Erwärmungstemperatur wenn die Einwalzkraft und Meβtiefe konstant bleiben:

a) bei der Einwalzkraft $P = 20$ daN bis auf eine Temperatur von 200°C bleibt die Mikrohärte für alle Meβtiefe unverändert. Zwischen 200... 300°C fällt sie sehr wenig, und zwischen 300...400°C stellt man eine akzentuierte Verminderung fest, besonders in der Oberflächenschicht (0,05 mm), etwa 15% (Abb. 6);

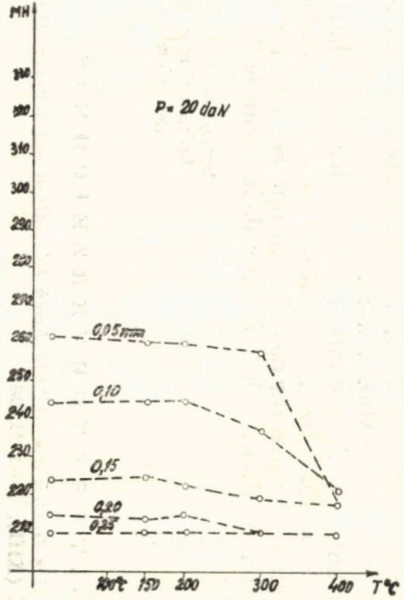


Abb. 6. — Mikrohärteverlauf mit der Erwärmungstemperatur bei $P = 20$ daN und $h =$ unver.

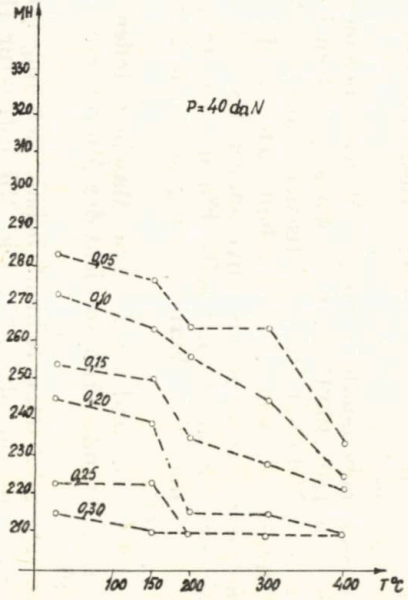


Abb. 7. — Mikrohärteverlauf mit der Erwärmungstemperatur bei $P = 40$ daN und $h =$ unver.

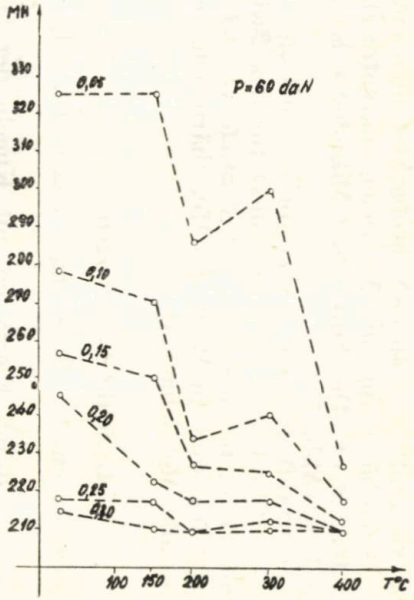


Abb. 8. — Mikrohärteverlauf mit der Erwärmungstemperatur bei $P = 60$ daN und $h =$ unver.

b) bei der Einwalzkraft $P = 40$ daN beobachtet man eine Verminderungsabsicht der Mikrohärte für alle Meβtiefen, akzentuierter in dem Zwischenraum von 150...200°C. Das Sinken der Mikrohärte ist akzentuierter als im vorigen Fall (Abb. 7);

c) bei der Einwalzkraft $P = 60$ daN ergibt sich die allgemeine Verminderungsabsicht der Mikrohärte, sehr akzentuiert für den Zwischenraum 150...200°C und 300...400°C, besonders für die Meβtiefe von 0,05 mm. Bei der Temperatur von 400°C sind die Werte der Mikrohärte sehr nahe an der des Grundstoffs für alle Meβtiefen (Abb. 8).

4. Schluβfolgerungen

Nach den ausgeführten Untersuchungen lassen sich folgende Folgerungen ziehen:

1. Bei dem Härten durch Einwalzen mit Kugeln der Oberflächenschicht äußern sich Verbesserungen der Parameter, welche die Betriebshaltbarkeit der Maschinenteile charakterisiert, Gesichtspunkt, der in unseren vorigen Arbeiten gezeigt wurde.

2. Die Betriebswärmebehandlung einiger Maschinenelemente enthält das Temperaturfeld von 150...400°C, auch in den ausgefürten Forschungen berücksichtigt, was die Mehrheit der praktischen Fälle deckte.

3. Für die Einwalzkraft von 20 daN erhält sich die Mikrohärte der gehärteten Oberflächenschicht ungefähr unverändert bis auf 300°C, und bei 400°C nähert sie sich die des Grundstoffs. Für die Kräfte von 40 daN und 60 daN beobachtet man eine Verminderung auch im Temperaturbereich zwichen 150...200°C.

4. Bei den gehärteten und erwärmten Maschinenteilen beobachtet man eine akzentuiertere Verminderungsabsicht der Mikrohärte mit ansteingender Einwalzkraft.

5. Die Stärke der gehärteten Schicht behält sich ungefär unverändert für alle verwendeten Einwalzkräfte. Die Mikrostruktur (Feingefüge) der Probekörper beweistt daβ in dem Temperaturbereich zwischen 150... ...400°C keine Rekristallisation auftrit, was man auch in den Mikrostrukturfilmen beobachten kann (Abb. 9...12).

6. Die Erhaltung der Eigenschaften der mit Kugeln gehärteten Oberflächenschicht, nur bis auf eine Temperatur von 300°C, erlaubt die Vermutung daβ über diese Temperatur das Härten mit Kugeln, mit den in dem Bericht spezifizierten Kräften, keine Wirksamkeit mehr hat.

Eingegangen am 16. März 1961

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl von Technologie
des Maschinenbaus

LITERATURVERZEICHNIS

1. Picoş C., *Über das Härten der Metalle durch Einwalzen mit Kugeln.* Bul. Inst. polit. Iaşi, IX (XIII), *1—2* (1963).

Mikrögefüge

Abb. 9 — Gehärtet mit $P_{einw} = 20$ daN. Glühbehandlung bei 400°C.

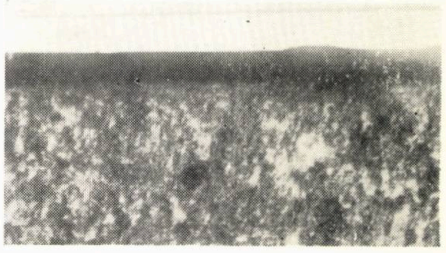


Abb. 10 — Gehärtet mit $P_{einw} = 60$ Nda. Glühbehandlung bei 400°C.

Abb. 11. — Gehärtet mit $P_{einw} = 20$ daN. Nicht geglüht.

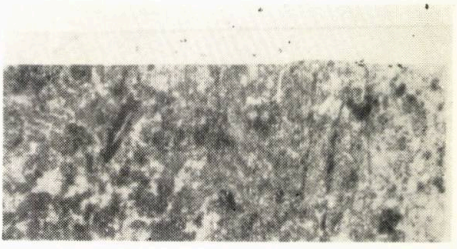


Abb. 12. — Gehärtet mit $P_{einw} = 60$ daN. Nicht geglüht.

2. Picoş C., *Der Einfluss plastischer Formänderungen der Oberflächenschicht durch Einwalzen mit Kugeln auf die Dauerfestigkeit.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XIV (XVIII), *3—4* (1968).
3. Grozinskaia Z. P., *Oberflächenhärtung der Metalle durch Einwalzen mit Kugeln.* In *Die Oberflächenraucheit der Maschinenelemente* (übersetzt aus dem Russischen). I. D. T., Bukarest, 1960.

STUDIUL VARIAŢIEI MICRODURITĂŢII STRATULUI SUPERFICIAL DURIFICAT PRIN RULARE CU BILE, ÎN RAPORT CU TEMPERATURA DE ÎNCĂLZIRE

(Rezumat)

În continuarea cercetărilor întreprinse în domeniul durificării suprafeţelor prin rulare cu bile, s-a determinat temperatura pînă la care microduritatea stratului superficial durificat nu se modifică. Experimentările s-au făcut cu OLC 45 (STAS 880—66), pe epruvete cu $d = 13$ mm.

Experienţele s-au făcut pe epruvete durificate prin rulare cu bile, cu forţe de 20, 40, 60 daN, încălzindu-se serii de epruvete la temperatura cuprinsă în limitele de 150... ...400° C.

Pentru forţe de rulare de 20 daN microduritatea se menţine aproximativ constantă pînă la temperatura de 300°C (remarcîndu-se o tendinţă de scădere mai accentuată pentru forţele de rulare de 40 şi 60 daN în intervalul de 150...200°C), iar la temperatura de 400°C microduritatea se apropie de a metalului de bază. După încălzire se observă o tendinţă de scădere mai accentuată a microdurităţii cu cît forţa de rulare este mai mare.

Grosimea stratului durificat se menţine aproximativ constantă (în jurul lui 0,30 mm) pentru toate forţele de rulare.

Întrucît microduritatea stratului superficial rămîne în limite ridicate pînă la temperatura de 300°C, se poate trage concluzia că aceasta este limita de temperatură pînă la care se menţine eficacitatea durificării organelor de maşini rulate cu bile la regimul aplicat în prezenta lucrare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. K. 620.18

FORSCHUNGEN ÜBER DEN EINFLUSS DES LEGIERENS MIT STICKSTOFF UND ALUMINIUM AUF DIE HÄRTBARKEIT DES STAHLES 35M16 [1])

VON

PETRE TUDORAN

1. Einführung

Einige in letzter Zeit erschienene Forschungen [1]...[9], in Bezug auf die Möglichkeit einige Baustähle mit Stickstoff zu legieren, machen es nötig, den Einfluss dieses Elementes auf die verschiedenen Eigenschaften der betreffenden Legierungen so volständing wie möglich kennezulernen.

Die Härtbarkeit ist, wie bekannt, eine der wichtigen technologischen Charakteristiken des Stahles, die das Verhalten der Legierung bei der Wärmebehandlung beeinflusst.

Der Einflusst des Stickstoffes auf die Härtbarkeit der Baustähle wurde bis zur Zeit aber noch wenig untersucht.

Diesbezüglich stellen Drăgan, Costescu, Morţun und Iacob [1], [2], bei Untersuchungen an schweissbaren Baustählen mit etwa 0,15% C eine leichte Verschiebung nach rechts der Kurve des Umwandlungsbeginnes des Austenits aus dem Zeit-Temperatur-Umwandlungsschaubild fest, sowie einen sehr geringen Einfluss auf die Kurve der Umwandlungsbeendingung durch eine Zugabe von 0,017% N, was auf eine Erhöhung der Härtbarkeit durch Stickstoff hinweist.

Wenn auch der Einfluss des Stickstoffes auf die Härtbarkeit der Baustähle bis zur Zeit wenig untersucht wurde, gibt es dagegen eine Reihe von Daten über den Einfluss des Stickstoffes auf die isotherme Umwandlung des Austenits in nitrierten und karbonitrierten Schichten. So zum Beispiel wird in den Arbeiten [10], [11] angenommen, dass der Stickstoff die Kurven des ZTU-Schaubildes nach rechts verschiebt, wodurch die Härtbarkeit erhöht wird. Es gibt aber auch entgegengesetzte Meinungen [12], wonach der Stickstoff die Dauer der Inkubationsperiode sowohl in der Perlit- als auch in der Beinitzone verringert, wodurch die Härtbarkeit des Stahles verringert wird.

Die den Einfluss des Stickstoffes auf die isotherme Umwandlung des Austenits und die Härtbarkeit betreffenden Daten in den nitrierten und karbonitrierten Schichten können aber nur richtungsweisenden Charakter haben, da sie für viel grössere Stickstoffgehalte erhalten wurden als es jene der mit Stickstoff legierten Baustähle sind und für andere Stickstoffanreicherungsbedingungen des Stahles.

---

[1]) Die Arbeit wurde unter Leitung von Univ. Prof. Ing. Ştefan Mantea ausgeführt.

Die mit Stickstoff legierten Stähle enthalten, wie bekannt, in ihrer Zusammensetzung auch eines oder mehrere nitridebildende Elemente. Die Rolle der Nitridbildner ist es, den Stickstoff in chemischen Bindungen zu halten, wodurch das molekulare Auftreten des Stickstoffes verhindert wird, das die Ursache von Gaseinschlüssen sein kann.

Es scheint darum notwendig sowohl nur den Einfluss des Stickstoffes sowie auch den im Zusammenhang mit einigen nitridbildenden Elementen zu erforschen.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde versucht Daten über den Einfluss des Stickstoffes auf die Härtbarkeit des Stahles 35 M 16, in Abwesenheit und bei Vorhandensein von Aluminium als nitridbildendes Element, zu erhalten.

2. Untersuchungsmethodik

Es wurden experimentelle Schmelzen von Stahl 35M16 mit Stickstoff und mit Stickstoff und Aluminium legiert erarbeitet.

Die chemische Zusammensetzung der für die Härtbarkeitsbestimmung verwendeten Schmelzen ist in Tabelle 1 angeführt.

Die Schmelzen wurden in einem Induktionsofen mit einer Frequenz von 2 500 Hz mit saurer Zustellung erarbeitet, der ein Fassungsvermögen von etwa 125 kg hat.

Der Stickstoff wurde in Form von aufgesticktem Mangan mit 6% N in das Bad eingeführt.

Das Aluminium wurde in Form von metallischen Stücken eingeführt und zwar immer nach dem Stickstoff.

Tabelle 1

Chemische Zusammensetzung der experimentellen, für die Härtbarkeitsbestimmung benützten Schmelzen[1])

Schmelze Nr.	Schmelzen-gruppe	Elemente (%)				
		C	Mn	Si	Al	N
16	Bezugs-schmelze	0,35	1,59	0,35	0,015	0,010
42	A	0,36	1,54	0,39	0,016	0,020
43		0,37	1,58	0,39	0,014	0,024
18	C	0,36	1,48	0,42	0,058	0,009
29		0,37	1,44	0,41	0,106	0,012
23	D	0,34	1,48	0,47	0,056	0,019
24		0,35	1,47	0,42	0,118	0,020

[1]) Da die Zustellung des Schmelztiegels sauer war, überschreitet der Siliziumgehalt bei einigen Schmelzen ein wenig (max. 0,1%) die für den Stahl 35 M 16 vorgeschriebenen Grenzen. Der Gehalt an P und S befindet sich in den normalen Grenzen und zwar unter 0,031% P und unter 0,021% S.

Gegossen wurde in Graugusskokillen die mit Steiger versehen waren, wobei Blöcke mit einer Länge von 290 mm und einem Querschnitt von 105 ×105 mm² oben und 75 ×75 mm² unten erhalten wurden.

Nach dem Erstarren, bei etwa 600°C, wurden die Blöcke aus den Kokillen gewonnen und weiter an der Luft abgekühlt.

Die erstarrten Blöcke wurden danach bei 850...880°C vier Stunden lang geglüht, geschält und in Stangen von ∅ 35 mm ausgeschmiedet. Das Schmieden wurde auf einem 400 kg-Hammer gemacht, bei einer Anfangstemperatur von 1 200...1 250°C und die Endtemperatur war bei 850... ...900°C.

Die Härtbarkeitsbestimmung wurde nach der Stirnabschreckmethode, nach STAS 4930—66, durchgeführt. Die Probekörper wurden aus den auf ∅ 35 mm aus den Blöcken der experimentellen Schmelzen ausgeschmiedeten Stangen gefertigt. Vor der Fertigung der Probekörper wurden die Stangen einer Normalisierung bei 850°C unterzogen.

Die Erwärmungstemperatur der Probekörper im Ofen vor der Stirnabschreckung war 860°C.

Die Härte ist auf beiden Seiten des Probekörpers gemessen worden, wonach das arithmetische Mittel ausgerechnet wurde.

Die Härtbarkeitskurven sind nach den mittleren Werten der Versuche mit je zwei Härteprobekörpern für eine Schmelze konstruiert worden.

Bei den untersuchten Schmelzen wurde auch die Grösse des Austenitkornes nach der Methode der Sichtbarmachung des Ferritnetzes und des Vergleiches der im Mikroskop sichtbaren Körner mit den Bildern der Richtreihe nach STAS 5490—67 bestmmt.

3. Versuchsergebnisse

Die erhaltenen Ergebnisse sind in Tabelle 2 und in den Abb. 1...3 wiedergegeben.

Nach diesen Daten kann der Einfluss des Stickstoffes auf die Härtbarkeit des Stahles 35 M 16 bei verschiedenen Aluminiumgehalten verfolgt werden.

3.1. Der Einfluss des Stickstoffes auf die Härtbarkeit des Stahles 35 M 16 bei niedrigen Aluminiumgehalten

Der Einfluss des Stickstoffes auf die Härtbarkeit des Stahles 35 M 16 bei niedrigen Aluminiumgehalten (∼ 0,015% Al), also wenn keine zusätzliche Legierung mit Aluminium stattgefunden hat, kann auf Grund der in Tabelle 2 dargestellten Werte für die Schmelzen *16*, *42* und *43* mit niedrigem und annähernd gleichem Aluminiumgehalt (∼ 0,015% Al) und mit verschiedenem Stickstoffgehalt, sowie nach den Härtekurven aus Abb. 1 für diese drei Schmelzen, verfolgt werden.

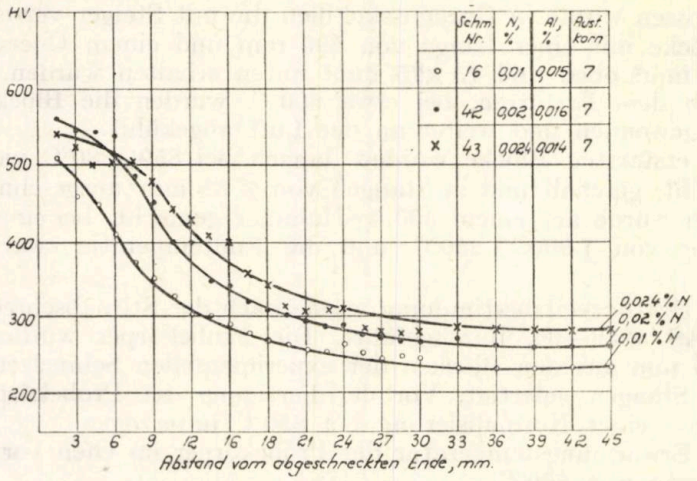


Abb. 1. — Der Einfluss des Legierens mit Stickstoff auf die Härtbarkeit des Stahles 35M16, bei niedrigen Aluminiumgehalten (~ 0,015% Al): o — 0,01 % N, ● — 0,02% N, × — 0,024% N. Austenitkorngrösse: ASTM — Richtreihennummer 7.

Aus diesen Ergebnissen geht hervor, dass bei niedrigen Aluminiumgehalten (~0,015% Al) der Stickstoff in den Grenzen 0,01...0,024 % N eine Verbesserung der Härtbarkeit des Stahles 35 M 16 bedingt.

Tabelle 2

Der Einfluss des Legierens mit Stickstoff und Aluminium auf die Härtbarkeit des Stahles 35 M 16

Schmelze Nr.	Gruppe	N %	Al %	Abstand der Semimartensitischen Härte-Zone vom abgeschreckten Ende	Härtbarkeits-Zahl Ja/b(c)	D_c bei Härten in Wasser	D_c bei Härten in Öl	Austenitkorn grösse; ASTM-Richtreihe Erwärmungstemperatur 850°C Haltezeit 1 h
16	Bezugsschmelze	0,01	0,015	6,8	J42/6,8(49)	33	20	7
42	A	0,02	0,016	10,2	J42/10,2(54)	44	29	7
43	A	0,024	0,014	13	J42/13(51)	54	36	7
18	C	0,009	0,058	11,2	J42/11,2(55)	50	31	9
29	C	0,012	0,106	13,8	J42/13,8(56)	58	38	7
23	D	0,019	0,056	7,2	J42/7,2(55)	35	22	10
24	D	0,02	0,118	9	J42/9(56)	40	26	9

3.2. Der Einfluss des Stickstoffes auf die Härtbarkeit des Stahles 35 M 16 bei mittleren und verhältnismässig hohen Aluminium gehalten

Bei mittleren (~ 0,05% Al) und bei höheren (~ 0,100% Al) Aluminiumgehalten ist der Einfluss des Stickstoffes auf die Härtbarkeit des Stahles 35 M 16 in Tabelle 2 und in den Abb. 2 und 3 dargestellt. Aus den dargestellten Werten geht hervor, dass, wenn die Härtbarkeit des Stahles 35 M 16 bei niedrigen Al-Gehalten (~ 0,015% Al) durch den Stickstoff gesteigert wird, diese bei mittleren (~ 0,05 % Al) und bei höheren (~ 0,100% Al) Al-Gehalten durch den Stickstoff herabgesetzt wird.

Die erhaltenen Ergebnisse unterstreichen die Tatsache, dass bei der Festlegung des Einflusses eines bestimmten Elementes auf die Härtbarkeit immer auch die Möglichkeit eines gleichzeitigen Einflusses anderer in der chemischen Zusammensetzung desselben Stahles vorhandenen Elemente in Betracht gezogen werden muss.

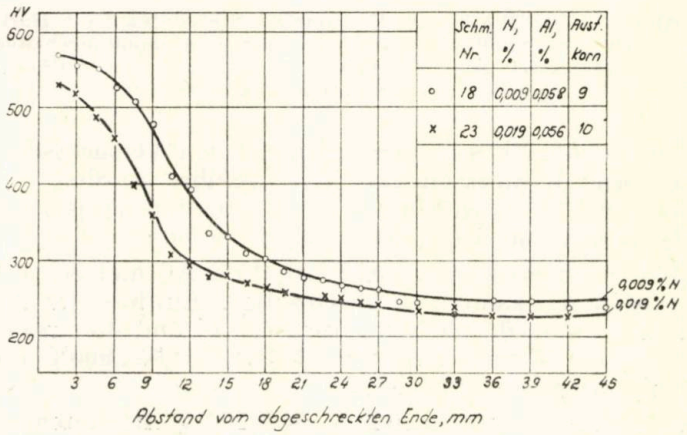


Abb. 2. — Der Einfluss des Legierens mit Stickstoff auf die Härtbarkeit des Stahles 35 M 16, bei mittleren Aluminiumgehalten (~ 0,05% Al): o — 0,009 % N, × — 0,019% N. Austenitkorngrösse: ASTM — Richtreihennummer 9 — 10.

Der in dieser Arbeit erforschte Fall zeigt einen verschiedenen Einfluss des Stickstoffes auf die Härtbarkeit des Stahles 35 M 16 in Abhängigkeit vom Aluminiumgehalt aus der Zusammensetzung.

Die erhaltenen Ergebnisse können die Koexistenz einiger Angaben aus der Fachliteratur, die die Steigerung der Härtbarkeit des Stahles durch Stickstoff [2], [10], [11] angeben, neben andern die eine Herabsetzung derselben durch den Stickstoff [12] darstellen, oder einen wenig bemerkbaren Einfluss [8], erklären.

Bei der Festlegung des Einflusses des Stickstoffes auf die Härtbarkeit wurde versucht, auch den vielleicht parallelen Einfluss der Austenit-

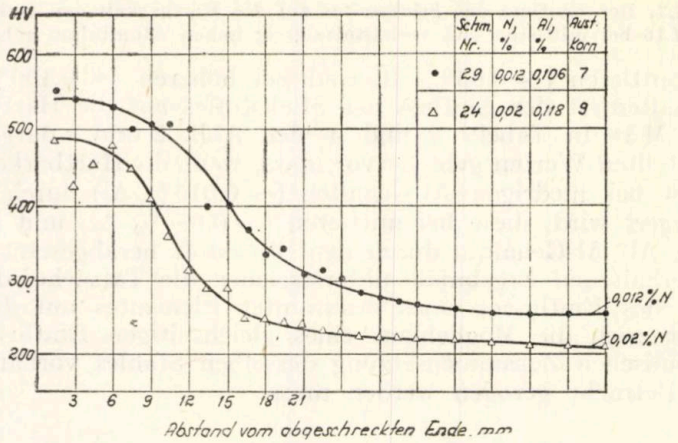


Abb. 3. — Der Einfluss des Legierens mit Stickstoff auf die Härtbarkeit des Stahles 35 M 16 bei höheren Aluminiumgehalten (~ 0,100% Al): ● — 0,012% N, Δ — 0,02% N. Austenitkorngrösse: ASTM-Richtreihennummer 7—9.

korngrösse zu berücksichtigen, weswegen bei den Versuchsschmelzen auch die Austenitkorngrössenbestimmung durchgeführt wurde.

Was den gleichzeitigen Einfluss der Austenitkorngrösse auf die Härtbarkeit anbelangt, kann folgendes gezeigt werden:

Bei niedrigen Prozenten an Al (~ 0,015% Al) und bei mittleren Prozenten (~ 0,05% Al) kann kein gleichzeitiger Einfluss der Austenitkorngrösse vorhanden sein, da die Schmelzen *16*, *42* und *43* einerseits und die Schmelzen *18* und *23* andererseits im Intervall 850...900°C ungefähr dieselbe Austenitkorngrösse aufweisen.

Bei höheren Aluminiumgehalten (~ 0,100% Al) treten wirklich Unterschiede in der Austenitkorngrösse auf, die aber die härtbarkeitsvermindernde Wirkung des Stickstoffes nur betonen könnten.

4. Auslegung der Versuchsergebnisse

Der Einfluss des Stickstoffes auf die Lage der Kurven des ZTU-Schaubildes und dadurch auch auf die Härtbarkeit kann erklärt werden, wenn man einerseits den Einfluss dieses Elementes auf die Bildungsgeschwindigkeit stabiler Perlitkeime beachtet und andererseits denjenigen auf die Wachstumsgeschwindigkeit der Perlitkolonien.

Bei niedrigen Aluminiumgehalten, also in Abwesenheit einer zusätzlichen Legierung mit Aluminium, kann angenommen werden, dass durch das Herabsetzen der freien Energie des Austenits von wegen des Stickstoffes [13], eine Verkleinerung des Wertes der freien Energie zur Bildung des Zementits aus unterkühltem Austenit stattfindet.

Diese Verkleinerung der freien Energie zur Bildung des Zementits aus unterkühltem Austenit hat ein Wachsen des Wertes der freien Energie des Keimes zur Folge, die mit ΔF_g bezeichnet wird, da auf Grund der Theorie von Volmer M. [14] und Becker R. und Döring W. [10]

$$\Delta F_g = \frac{16\pi}{3} \frac{\gamma^3_{Fe-\gamma/Fe_3C}}{\Delta F^2_{Fe-\gamma\to Fe_3C}}, \tag{1}$$

wo: — ΔF_g die freie Energie des Keimes ist, $\gamma_{Fe-\gamma\to Fe_3C}$ — die freie Energie der interfasischen Grenze Austenit/Zementit und $\Delta F_{Fe-\gamma\to Fe_3C}$ — die freie Energie zur Bildung des Zementits aus unterkühltem Austenit, auf die Volumeneinheit bezogen.

Das Anwachsen des Wertes der freien Energie des Keimes ΔF_g hat weiter eine Verringerung der Bildungsgeschwindigkeit der Perlitkeime V_g zur Folge, da, nach Becker R. [10]:

$$V_g = C' \exp\left(-\frac{\Delta F_g}{KT}\right) C'' \exp\left(-\frac{H}{KT}\right), \tag{2}$$

wo: V_g — die Bildungsgeschwindigkeit der Perlitkeime ist, C' und C'' — — Konstanten, ΔF_g — die freie Energie des Keimes, K — die Boltzmann' sche Konstante, T — die Temperatur in Kelvingraden und H — die Energie der Diffusionsaktivierung des Elementes von dessen Beweglichkeit die Bildung des Keimes abhängt.

Da das Anwachsen des Wertes der freien Energie des Keimes ΔF_g eine Verkleinerung des Ausdruckes $C' \exp\left(-\frac{\Delta F_g}{KT}\right)$ bewirkt, wird gleichzeitig auch eine Verkleinerung der Bildungsgeschwindigkeit der Perlitkeime V_g mitbestimmt.

Neben der Verkleinerung der Bildungsgeschwindigkeit der Perlitkeime, verringert der im Austenit gelöste Stickstoff auch die Wachstumsgeschwindigkeit der Perlitkolonien [10].

Auf diese Art könnte der Einfluss des im Austenit gelösten Stickstoffes in Richtung Vergrösserung der Härtbarkeit des Stahles bei niedrigen Aluminiumgehalten erklärt werden.

Bei mittleren ($\sim$ 0,05% Al) und verhältnismässig hohen ($\sim$ 0,100% Al) Aluminiumgehalten zeigen die erhaltenen Werte eine Verringerung der Härtbarkeit durch das Erhöhen des Stickstoffgehaltes von etwa 0,01% N bis etwa 0,02% N. Diese Lage könnte durch ein Vermehren der Nitridmengen im Stahl und durch die Beschleunigung der Austenit-Perlit-Umwandlung durch die sich im Austenit befindenden Nitridpartikeln erklärt werden. Die quantitative Vermehrung der Aluminiumnitride durch das Vergrössern des Stickstoffgehaltes im erforschten Stahl wurde in [16] beobachtet.

Das Vorhandensein einiger feiner Aluminiumnitridpartikeln im Austenit bei Temperaturen von 850...900°C, bei denen die Erwärmung zur

Austenitisierung stattgefunden hat, ist möglich, da, so wie auch in [17] gezeigt wird, die Aluminiumnitride nur bei etwa 1 000°C in Lösung gehen.

Die Tatsache, dass die Nitride Zonen darstellen, in denen die Umwandlung des Perlits leichter beginnt, wird auch in [15] unterstrichen.

In dieser Art könnte der entgegengesetzte Einfluss des Stickstoffes auf die Härtbarkeit des Stahles 35 M 16 und auch die anderer gleichartiger Stähle erklärt werden. Es geht also hervor, dass bei niedrigen Aluminiumgehalten der Einfluss des im Austenit gelösten Stickstoffes vorherrschend ist, und dass dieser eine Vergrösserung der Härtbarkeit hervorruft, während bei mittleren oder höheren Aluminiumgehalten der Einfluss des zu Nitriden gebundenen Stickstoffes vorherrscht, der auf eine Verminderung der Härtbarkeit hinwirkt.

5. Schlussfolgerungen

1. Bei der Erforschung des Einflusses des Stickstoffes auf die Härtbarkeit des Stahles 35 M 16 wurde festgestellt, dass sich dieser verschiedenartig bemerkbar macht in Abhängigkeit vom Aluminiumgehalt aus dem Stahl.

2. Bei niedrigen Aluminiumgehalten bewirkt eine Erhöhung des Stickstoffgehaltes in den Grezen 0,01...0,024% N ein Anwachsen der Härtbarkeit. Diesen Einfluss kann man durch die Verkleinerung der freien Energie des Austenits durch den in diesem gelösten Stickstoff erklären, und durch eine davon bedingte Verringerung der Bildungsgeschwindigkeit der Perlitkeime.

3. Bei mittleren ($\sim$ 0,05% Al) und höheren ($\sim$ 0,100% Al) Aluminiumgehalten bewirkt eine Erhöhung des Stickstoffgehaltes von 0,01% N zu 0,02% N eine Verminderung der Härtbarkeit des Stahles. Dieser Einfluss könnte durch die Rolle eines Beschleunigers er perlitischen Umwandlungsgeschwindigkeit seitens der Nitridpartikeln erklärt werden.

Eigegangen am 15. Juni 1971

Technische Hochschule, Braşov,

LITERATURVERZEICHNIS

1. Drăgan N., Costescu M., Morţun A., Iacob M., St. şi cerc. de met., *1*, 17—28 (1970).
2. Drăgan N., Costescu M., Morţun A., Iacob M., Metalurgia, *6—7*, 340—348 (1969).
3. Wiester H. I., Vogels H. A., Ulmer H., Stahl und Eisen, *16*, 1120—1129 (1959).
4. * * * *IN-treated steel approved by Nippon Kaiji schipbuilding.* Japan Schipp and Schipbuilding, 8, *9*, 42 (1963).
5. Kobrin C. L., *Nitrides Strengthen Steels.* Iron Age Metallwork International, *5*, 20—21 (1964).
6. Brazzo P., Berruti V., Di Bartolo S., Michelucci S., Rev. de Métalurgie, 475—491 (mai 1964).
7. Клаустинг Е. А., Петунина Е. В., Сталь, *1*, 56—69 (1965).

8. Панфилова Л. М., Голдстеин М. И., Металов. и терм. обраб. мет., *10*, 22—27 (1966).
9. Бараташвили И. Б., Бережияни В. М., Металов. и терм. обраб. мет., *10*, 70 — 72 (1964).
10. Прженосил Б., *Нитроцементация* (übersetzt aus dem Tschechischen). Машиностоэния, Л., 1969.
11. Mazur A., Malkiewicz T., Hutnik (Polska), *9*, 325—330 (1965).
12. *** Izînşu siuebao, Acta metallurgica sinica (nach реф. журнал „Металлургия", 6 Ж 83, 1965).
13. Мескин В. С., *Основы легирования сталь*. Изд „Металлургия", М., 1964.
14. Volmer M., *Kinetik* der *Phasenbildung*. T. Steinkopf, Dresden, 1939.
15. Hemingway R. D., Iron and Steel, 8, *9*, 341—342, 393—396 (1968).
16. Tudoran P., Mantea Şt., St. şi cerc. de metalurgie, *2*, 147—155 (1970).
17. Шульте Ю. А., *Неметаллические включения в электросталь*. Изд „Металлургия", М., 1964.

CERCETĂRI PRIVIND INFLUENŢA ALIERII CU AZOT ŞI ALUMINIU ASUPRA DURITĂŢII OŢELULUI 35 M 16

(Rezumat)

Se studiază influenţa alierii cu azot asupra durităţii oţelului 35 M 16 pentru diferite conţinuturi de aluminiu. Se stabileşte că influenţa azotului este din acest punct de vedere diferită şi independentă de conţinutul în aluminiu al oţelului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C.Z. 621 901

CONTRIBUȚII LA DINAMICA FREZĂRII FRONTALE, CU CAPETE DE FREZAT, A UNOR OȚELURI ALIATE UTILIZATE ÎN CONSTRUCȚIA DE MAȘINI [1])

DE

GH. CAȘLER, MIRCEA COZMÎNCĂ și GH. LUNGU

1. Introducere

Dependența procesului de așchiere prin frezare de un mare număr de factori (parametrii regimului de așchiere, parametrii geometrici ai sculei, materialul de prelucrat gradul de uzură al sculei, etc.) care nu pot fi reproduși întotdeauna exact, ca și dependența acțiunii unor factori de influența altora au făcut ca relațiile de calcul ce privesc mecanica procesului de așchiere prin frezare să fie permanent supuse unor verificări experimentale.

Astfel relațiile de calcul teoretice ale forței tangențiale la frezare

$$P = \frac{C\,2^{n+2}\,S_z^{n+1}}{2\pi(n+2)}\,BZt^{\frac{n+2}{2}}\,D^{-\frac{n+2}{2}}, \tag{1}$$

sau cele prezentate în lucrarea [1] au fost supuse verificărilor experimentale, nu însă înainte de a fi transformate convenabil acestui scop. Pe această linie este de menționat relația propusă de Comisia pentru așchierea metalelor din U.R.S.S., și anume:

$$P = C_p\,t^{x_p}\,S_z^{y_p}\,B\,Z\,D^{q_p}. \tag{2}$$

Aici, în conformitate cu (1)

$$C_p = \frac{2^{n+1}}{n+2}\,\frac{C}{\pi}, \qquad y_p = n+1, \qquad x_p = \frac{n+2}{2}, \qquad q_p = -\frac{n+2}{2}.$$

Pentru anumite condiții de lucru, relația (2) se completează cu o serie de coeficienți K_γ, K_v, K_h, K_m, astfel încît devine:

$$P = C_p\,t^{x_p}\,S_z^{y_p}\,B\,Z\,D^{q_p}\,K^\gamma\,K_v\,K_h\,K_m. \tag{3}$$

---

[1]) Prezentată la sesiunea științifică a Institutului politehnic din Iași, din 2–4 iulie 1970.

Dacă această ultimă relație satisface din punct de vedere structural cazul frezării suprafețelor plane cu freza cilindrică sau cu freza disc, deoarece are la bază relația teoretică (1) stabilită pentru cazul schemei de așchiere cu freza cilindrică în ipoteza unei frezării uniforme, ea nu poate satisface cazul frezării frontale. Aceasta pentru că elementele secțiunii așchiei au alte limite de variație decît cele presupuse în (3), iar ipoteza frezării uniforme se exprimă acum prin obligativitatea ca cel puțin 2...3 dinți ai frezei să lucreze simultan, ceea ce înseamnă că B nu poate apare la exponent unitar. De asemenea, conform schemei clasice de frezare frontală simetrică (fig. 1), unghiurile $\varkappa$ și $\varkappa_0$ influențează substanțial atît mărimea cît și raportul dintre diferitele componente ale forței de așchiere la frezarea frontală. Așa dar coeficienții și exponenții din relația (3), prezentați în literatură pentru cazul frezării frontale, nu pot satisface decît aproximativ un caz concret de frezare frontală.

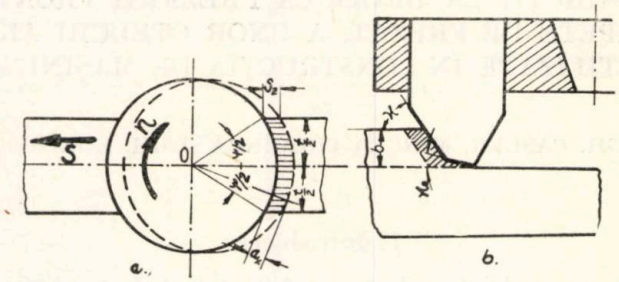


Fig. 1

Plecînd de la aceste considerente, în lucrarea de față se prezintă primele rezultate experimentale obținute în Laboratorul de Mașini unelte și scule de la Institutul politehnic din Iași în legătură cu mărimea forțelor precum și cu valorile coeficienților și exponenților din relația de calcul a forței tangențiale la frezarea frontală. În particular, în lucrare se determină coeficientul C_p și exponenții r_p și y_p din relația

$$P = C_p\, t^{x_p}\, S_z^{y_p}\, b^{r_p}\, ZD^{q_p}\, K_\gamma\, K_v\, K_h\, K_m, \tag{4}$$

acceptată pentru cazul frezării frontale, cu capete de frezat prevăzute cu cuțite demontabile armate cu plăcuțe metalo-ceramice, a unui grup de oțeluri aliate utilizate în construcția de mașini.

2. Partea experimentală

Metodologia folosită este aceeași cu cea utilizată în lucrarea [1], numai că pentru experimentare pe mașina de frezat universală FU—1 Cugir s-a montat un cap port sculă de frezat vertical iar ca sculă s-a folosit o freză frontală cu opt cuțite demontabile și armate cu plăcuțe tip T 15 K 10. În plus, pentru înregistrarea directă a forței tangențiale s-a construit în laborator un nou dinamometru pe ale cărui elemente elastice s-au montat convenabil mărci tensometrice.

Înregistrarea mărimii forței tangențiale s-a făcut cu ajutorul unei punți tensometrice rezistive tip Orion iar măsurările s-au efectuat cu metoda

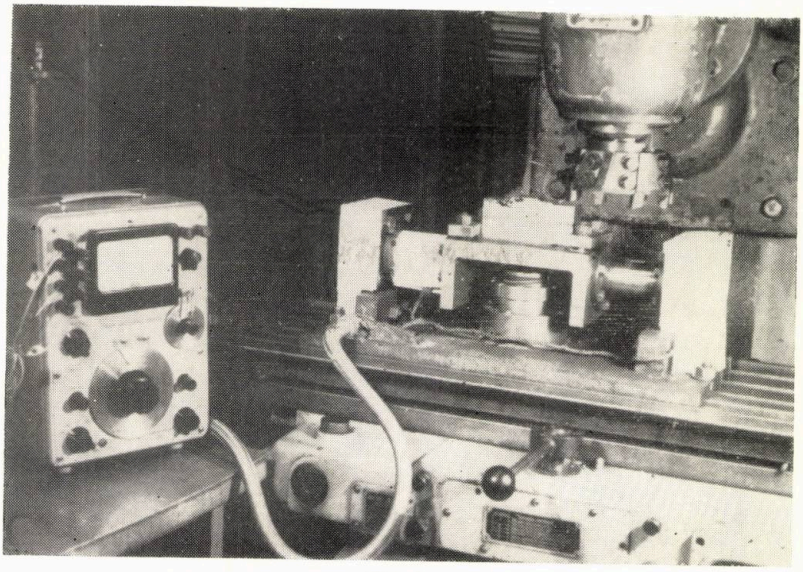


Fig. 2

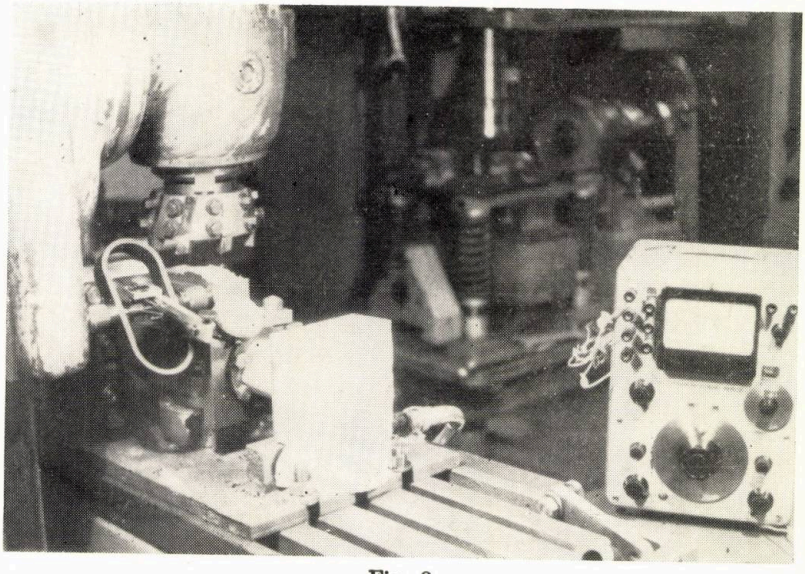


Fig. 3

punții dezechilibrate sau a deviației (fig. 2). Pornind de la puntea inițial echilibrată s-a executat etalonarea devierii acului indicator al punții pentru componenta tangențială a forței de așchiere la frezarea frontală folosind posibilitățile de avans ale mașinii și un dinamometru mecanic etalon pentru controlul mărimii sarcinii de încărcare (fig. 3).

Curbele de etalonare obținute pentru fiecare eșantion prelucrat au aspectul din fig. 4. Forma liniară a acestor grafice cît și faptul că diagrama de încărcare se suprapune peste cea de descărcare demonstrează că elementul elastic al dinamometrului nu depășește limita deformațiilor elastice și că deci nu intervin deformații remanente. Din fig. 4 rezultă și faptul că pentru condițiile de lucru prezentate mai sus puntea Orion oferă o sensibilitate suficientă, în sensul că o diviziune de la aparatul de înregistrare al punții Orion corespunde la 10 kgf pentru forța tangențială măsurată.

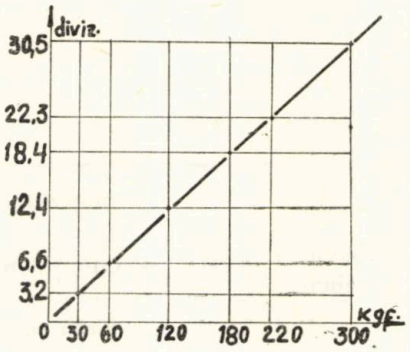


Fig. 4

Trebuie menționat de asemenea că dinamometrul folosit, prin însăși construcția sa, oferă o rigiditate suficient de mare pe toate direcțiile, astfel încît procesul de așchiere s-a desfășurat normal.

După prelucrarea fiecărei mărci de oțel la b variabil și S_z variabil (ceilalți parametri fiind constanți) s-a întrerupt experimentul pentru a evita încălzirea exagerată a instalației.

Eșantioanele supuse experimentului au fost executate din următoarele cinci mărci de oțel (STAS 791-66): 15 CO 8, 40 C 10, 40 BC 10, 35 M 16, 18 MC 10. Conform normelor standard aceste mărci de oțel aliat fac parte din grupa „oțeluri de largă utilizare" iar compoziția chimică și duritatea pentru eșantioanele prelucrate sînt prezentate în tabelul 1.

Pentru fiecare marcă de oțel s-a folosit aceeași freză frontală cu diametrul de lucru $D = 150$ mm, la turația $n = 118$ rot/min, cu patru valori ale avansului pe dinte ($S_z = 0{,}08$, $S_z = 0{,}125$, $S_z = 0{,}2$ și $S_z = 0{,}318$) alese conform normativelor pentru regimurile de așchiere ale M.M.C.M. [5] precum și cu patru valori ale lățimii de frezat ($b = 1$ mm, $b = 1{,}5$ mm,

Tabelul 1

Oţeluri	Marca	Compoziţia chimică					Duritatea
		C	Si	Mn	Cr	B	HB
Cr	15 CO 8	0,12...0,18	0,17...0,37	0,4. .0,7	0,7...1,0	—	180
	40 C 10	0,36...0,44	0,17...0,37	0,5...0,8	0,8...1,1	—	215
Cr-B	40 BC 10	0,36...0,44	0,17...0,37	0,5...0,8	0,8...1,1	0,001...0,003	215
Mn	35 M 16	0,32...0,4	0,17...0,37	1,4...1,8	—	—	210
Cr-Mn	18 MC 10	0,15...0,22	0,17...0,37	0,9...1,2	0,9...1,2	—	190

Tabelul 2

Lăţimea de frezare	Avansul pe dinte	Avansul pe minut	Materialul prelucrat				
			15 CO 8	40 C 10	40 BC 10	35 M 16	18 MC 10
			Forţa tangenţială P				
b	S_z	S	kgf				
1	0,08	75	38	40	52	40	52
	0,125	118	52	56	72	60	64
	0,2	190	68	76	88	72	80
	0,318	300	92	100	120	104	104
1,5	0,08	75	64	64	72	54	68
	0,125	118	84	88	104	80	88
	0,2	190	112	120	128	104	116
	0,318	300	140	152	172	140	148
2	0,08	75	72	76	84	80	76
	0,125	118	100	104	120	104	104
	0,2	190	128	132	160	140	140
	0,318	300	180	188	208	200	188
2,5	0,08	75	84	88	92	96	84
	0,125	118	116	120	128	128	116
	0,2	190	156	160	180	164	160
	0,318	300	208	220	240	220	220

$b = 2$ mm și $b = 2{,}5$ mm). Adîncimea de frezare a fost constantă $t = 40$ mm iar așchierea s-a făcut fără răcire-ungere. Trebuie menționat de asemenea că frezarea a avut loc în condițiile în care un singur cuțit al frezei frontale se afla în contact cu materialul prelucrat.

În aceste condiții, la prelucrarea fiecărei mărci de oțel, păstrînd toți parametrii de așchiere constanți și dînd succesiv lui S_z, respectiv b, valorile specificate mai sus, s-a făcut lectura valorilor forței tangențiale în diviziuni la aparatul de măsură al punții Orion. Ținînd seama de legea de variație a forțelor la frezarea frontală simetrică incompletă, adică la $t < D$ (fig. 1 *a*), au fost considerate valorile maxime ale forței tangențiale indicate de aparatul de măsură. Folosind constanta de etalonare (fig. 4) s-au obținut final valorile corespunzătoare pentru forța tangențială P în kgf (tabelul 2).

Cu ajutorul valorilor lui P determinate experimental și ale lui S_z și b utilizate la prelucrarea mărcilor de oțel considerate, s-au trasat în coordonate dublulogaritmice două rînduri de drepte la $b = \text{const}$ și la $S_z = \text{const}$ (fig. 5...9).

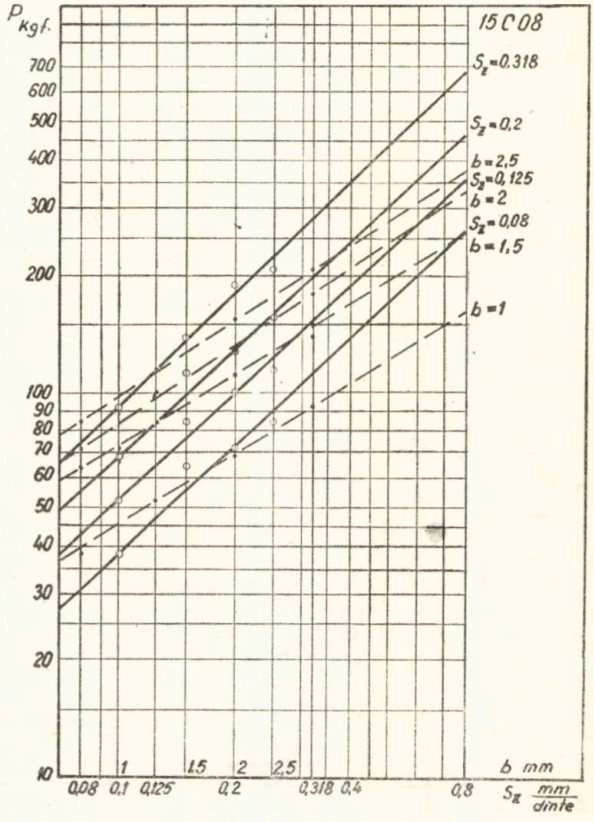


Fig. 5

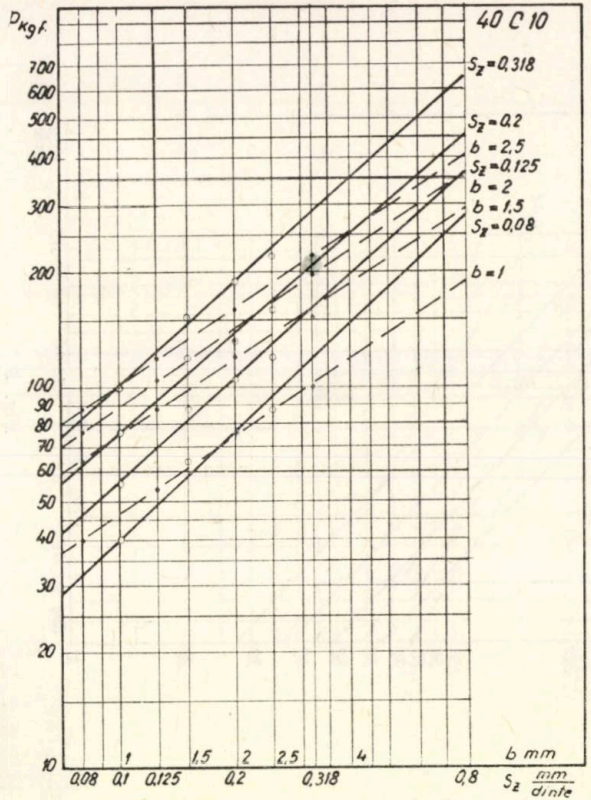

40 C 10
D_{kgf}
700
600
500
400
300
200
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
$S_z = 0,318$
$S_z = 0,2$
$b = 2,5$
$S_z = 0,125$
$b = 2$
$b = 1,5$
$S_z = 0,08$
$b = 1$
1
1,5
2
2,5
4
b mm
0,08
0,1
0,125
0,2
0,318
0,8
S_z mm/dinte

Fig. 6

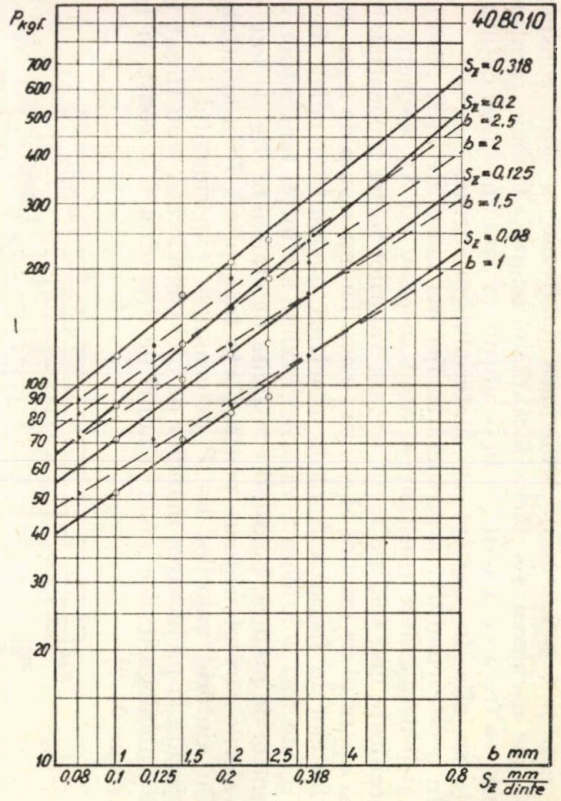

40BC10
P_{kgf}
700
600
500
400
300
200
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
$S_z = 0,318$
$S_z = 0,2$
$b = 2,5$
$b = 2$
$S_z = 0,125$
$b = 1,5$
$S_z = 0,08$
$b = 1$
1
1,5
2
2,5
4
b mm
0,08
0,1
0,125
0,2
0,318
0,8
S_z mm/dinte

Fig 7

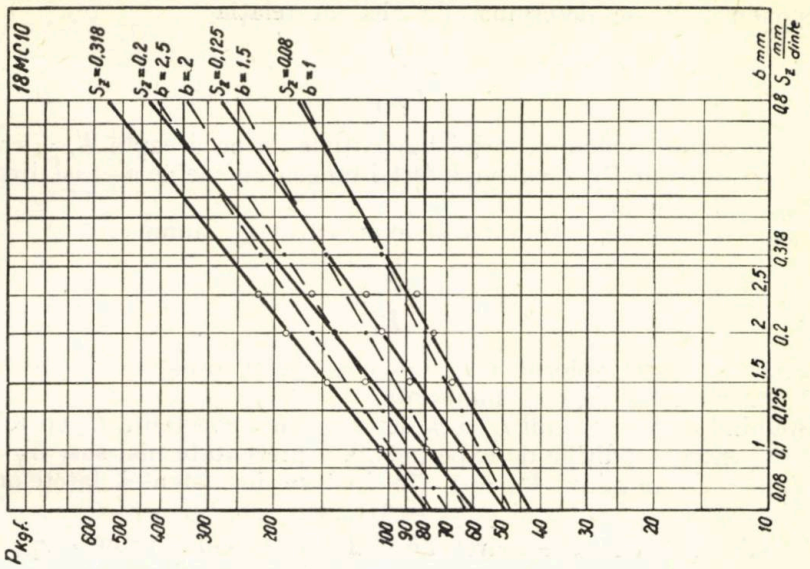

18MC10
S_z=0,318
S_z=0,2
b=2,5
b=2
S_z=0,125
b=1,5
S_z=0,08
b=1
$P_{kgf.}$
b mm
S_z mm/dinte

Fig. 9

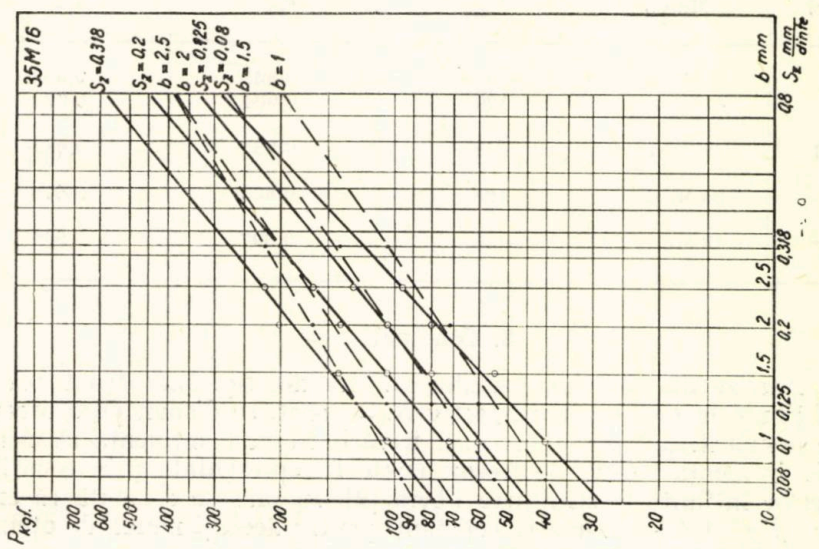

35M16
S_z=0,318
S_z=0,2
b=2,5
b=2
S_z=0,125
S_z=0,08
b=1,5
b=1
$P_{kgf.}$
b mm
S_z mm/dinte

Fig. 8

Exponentul r_p se determină de aici cu relația

$$r_p = \log \frac{P_2}{P_1}, \tag{5}$$

în care P_1 reprezintă valoarea forței tangențiale de pe dreapta $S_z = \text{const}$, pentru $b_1 = 1$ mm, iar P_2 — valoarea forței tangențiale de pe aceeași dreaptă $S_z = \text{const}$, dar pentru $b_2 = 10$ mm.

În mod analog se determină și exponentul y_p, anume:

$$y_p = \log \frac{P'_2}{P'_1}. \tag{6}$$

Pentru această relație valorile forței se aleg de pe dreapta $b = \text{const}$ la $S_{z_1} = 0{,}1$ mm/dinte și $S_{z_2} = 1$ mm/dinte.

Dispunînd de valorile lui r_p și y_p se determină constanta C_p cu relația (4), în care pentru condițiile de experimentare prezentate mai sus, $K_\gamma = 1$, $K_v = 1$ ($v = 55{,}6$ m/min), $K_h = 1$ (în ipoteza inexistenței fațetelor de uzură), $K_m = 1$ iar $x_p = 1{,}1$ și $q_p = -1{,}1$ [4].

În final, pentru fiecare marcă de oțel s-au calculat valorile r_{pm}, y_{pm} și C_{pm} ca medie aritmetică a celor patru valori destul de apropiate pentru r_p respectiv y_p, și a celor opt valori pentru constanta C_p. Rezultatele sînt centralizate în tabelul 3.

Tabelul 3

Oțeluri	Marca	C_{pm}	r_{pm}	y_{pm}
Cr	15 CO 8	93	0,985	0,633
	40 C 10	120	0,904	0,67
Cr-B	40 BC 10	140	0,785	0,659
Mn	35 M 16	128	0,868	0,676
Cr-Mn	18 MC 10	114	0,697	0,594

3. Concluzii

1. Analiza diagramelor dublulogaritmice din fig. 5...9 denotă că valorile obținute la $b = \text{const}$, respectiv $S_z = \text{const}$, se dispun pe o dreaptă, ceea ce demonstrează că și în cazul frezării frontale influența avansului, respectiv influența lățimii de frezat, poate fi reprezentată prin ecuații de forma celor întîlnite la strunjirea liberă [2]. În plus se constată că exponenții r_p și y_p sînt aproximativ constanți pentru aceeași marcă de oțel.

2. Rezultatele prezentate în tabelul 2 pun în evidenţă faptul că pentru fiecare tip de oţel se obţin valori specifice pentru constanta C_p şi exponenţii r_p, y_p. Astfel, pentru cele două oţeluri crom 15 CO 8 şi 40 C 10, exponenţii r_{pm} şi y_{pm} au aceleaşi valori în timp ce constanta C_p este mai mare la marca de oţel cu procent mai ridicat de crom (40 C 10). Comparativ cu oţelul Cr, pentru oţelul Cr—B scade valoarea exponenţilor r_p şi y_p şi creşte C_p, ceea ce denotă o creştere a forţelor (v. tabelul 1). În cazul oţelului Cr—Mn, comparaţia cu oţelul Mn arată că prezenţa cromului determină o scădere atît a constantei C_p cît şi a exponenţilor r_p, y_p.

3. În raport cu valorile indicate în literatură pentru cazul frezării frontale simetrice a oţelurilor ($C_p = 82$), constanta C_p obţinută pentru acest grup de oţeluri aliate este mai mare, iar exponenţii x_p, y_p înregistrează valori mai mici decît $r_p = 0{,}95$ şi $y_p = 0{,}8$ [4].

4. Valorile constantelor C_p, r_p şi y_p trebuie deci determinate pentru fiecare tip de oţel, ansamblul proprietăţilor fizico-mecanice ale materialului prelucrat cît şi caracteristicele sale structurale fiind elemente de prim ordin în definirea comportării oţelului la prelucrarea prin aşchiere.

Primită la 7 iulie 1970

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de maşini unelte şi scule

BIBLIOGRAFIE

1. Caşler Gh., Zetu D., Cozmîncă M., *Contribuţii la dinamica frezării cu freze cilindrice elicoidale la grupa de oţeluri obişnuite* (OL STAS 500—63). Constr. de maşini, *11*, 639—645 (1968).
2. Caşler Gh., *Comportarea oţelurilor româneşti privind unii parametri din dinamica aşchierii la strunjire.* Constr. de maşini, *8* (1964).
3. Caşler Gh., Belous V., Rener Al., *Contribuţii la cercetarea experimentală a dinamicii burghierii oţelurilor româneşti.* Constr. de maşini, *6—7* (1967).
4. * * * *Справочник машиностроителя.* Т. 5, Книга II, М., 1964.
5. * * * *Normative unificate de regimuri de aşchiere a metalelor feroase.* Vol. I, II, M.M.C.M., 1961.

CONTRIBUTIONS À LA DYNAMIQUE DU FRAISAGE DE FRONT AVEC DES TÊTES DE FRAISAGE, DE QUELQUES SORTES D'ACIER ALLIÉ UTILISÉS DANS LA CONSTRUCTION DES MACHINES

(Résumé)

On présent les premiers résultats experimentals obtenus dans le Laboratoire de Machine — outils de l'Institut Polytechnique de Jassy concernant les efforts et aussi les valeurs de la constante et des exposants de la relation pour le calcul de l'effort tangentielle P, dans le processus de fraisage de front symétrique.

En utilisant un dynamomètre équipé avec des marques tensiométriques et un considérant un seul dent en contact avec la pièce usinée, on détermine la constante C_p et les exposants r_p, y_p pour cinq sortes d'acier allié : 15 CO 8, 40 C 10, 40 BC 10, 35 M 16, 18 MC 10 (STAS 791—66).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.9.01

DETERMINAREA PARAMETRILOR MOMENTULUI DE TORSIUNE LA TARODAREA OȚELURILOR ROMÂNEȘTI [1])

Nota I

OȚELURILE STAS 500–63

DE

DAN NICOLESCU

1. Introducere

Litaratura de specialitate și normativele existente la noi în țară recomandă valori ale parametrilor C_M și x_M din relația momentului de torsiune la tarodare

$$M = C_M D^{x_M} p^{y_M} \quad [\text{kgf cm}] \tag{1}$$

pentru diverse materiale (fonte, oțeluri, etc.) [3], valori care ca și în celelalte procese de așchiere, pot fi considerate riguros exacte numai în cazul așchierii libere [2]. Avînd în vedere faptul că și procesul de tarodare este condiționat de factorii așchierii complexe, apare necesitatea determinării cu precizie a valorilor constantei și exponenților pentru fiecare material în parte.

2. Condiții de experimentare

S-a lucrat cu tarozi de mașină așchiați-rectificați (tip II, STAS 1153-63), care prezintă avantaje față de alte tipuri de scule din această categorie [1], fiind frecvent utilizați în producție. Determinările experimentale s-au efectuat pe o mașină de găurit tip „Înfrățirea" G-40, în următoarele condiții: a) momentul de torsiune măsurat cu un dinamometru dublu, înzestrat cu sistem elastic Paramonov și cu microindicatoare; b) tarozii fixați într-un dispozitiv de prindere cu compensare, construit special în acest scop; c) viteze de așchiere între 1...3 m/min, corespunzătoare turațiilor

[1]) Prezentată la sesiunea științifică a Institutului politehnic din Iași, din 28–30 septembrie 1967.

mașinii ($n = 31{,}5$ rot/min, 45 rot/min, 63 rot/min) și celor patru dimensiuni de tarozi cu care s-au făcut determinările : M 20, M 16, M 10, M 6 (cu avansul, respectiv pasul constant : $p = 2{,}5$ mm, 2 mm, 1,5 mm, 1 mm) ; d) așchiere cu răcire ungere (emulsie 5%) ; e) s-au efectuat cîte trei determinări pentru fiecare punct (corespunzător unui pas) al diagramei de variație a momentului de torsiune M_t cu adîncimea de pătrundere a tarodului (l_x) ; f) filetarea s-a executat în găuri străpunse (piulițe), pentru cazul cînd $H = l_1$ (unde H este lungimea filetului de prelucrat, respectiv înălțimea piuliței, și l_1 — lungimea conului de atac al tarodului), situație în care literatura de specialitate [3] consideră, pentru momentul de torsiune, valori maxime (mai mari ca în cazurile $H > l_1$ sau $H < l_1$) ; g) tarozii utilizați sînt produse ale „Fabricii de scule" — Rîșnov și au următoarea geometrie : unghiul de degajare pe conul de atac și pe partea de calibrare, 4°, și unghiul de așezare pe conul de atac, 6°.

3. Rezultatele cercetării

Pe baza rezultatelor astfel obținute s-au întocmit diagrame (fig. 1...6) conținînd curbele experimentale de variație a momentului de torsiune (M_t) funcție de adîncimile de pătrundere ale tarodului (l_x), curbe trasate prin puncte și reprezentate în coordonate carteziene milimetrice.

Se observă că, în condițiile specificate la § 2 f, momentul devine maxim la fiecare tarod și pentru fiecare material spre sfîrșitul porțiunii de pătrundere a conului de atac și se menține la această valoare cel puțin pentru trei pași.

Valorile maxime ale momentului de torsiune (tabelul 1), pentru fiecare din cele șase materiale studiate, au fost înscrise în diagrame dublu

Tabelul 1

Nr. crt.	Oțel STAS 500–63	Valorile maxime ale momentelor de torsiune kgf mm			
		M 6	M 10	M 16	M 20
1	OL 34	830	1800	3800	5200
2	OL 38	870	2000	4220	6100
3	OL 42	980	2130	4650	6800
4	OL 50	1070	2300	5070	7400
5	OL 60	1200	2650	5700	8060
6	OL 70	1400	2900	6340	9000

logaritmice, trasîndu-se prin puncte (cîte patru, corespunzător celor patru dimensiuni de tarozi) curbele de variație ale momentului de torsiune funcție de diametru (D), care sînt niște drepte (fig. 7).

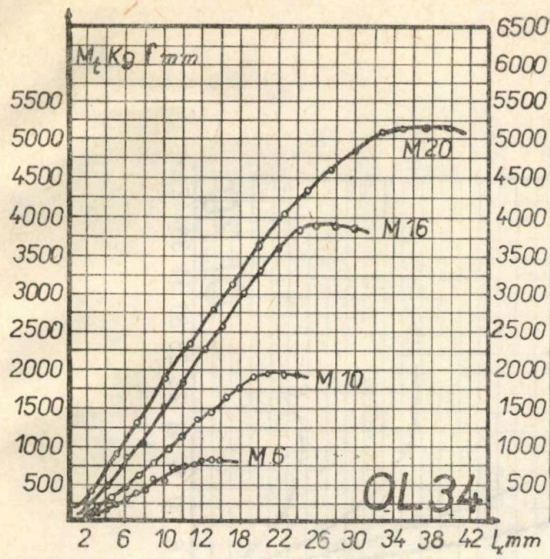


Fig. 1

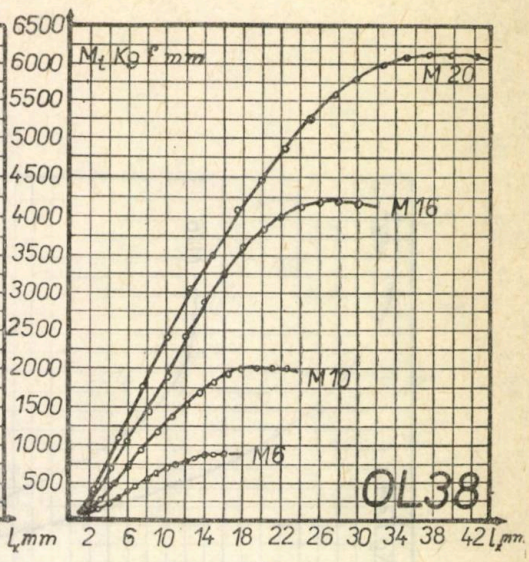


Fig. 2

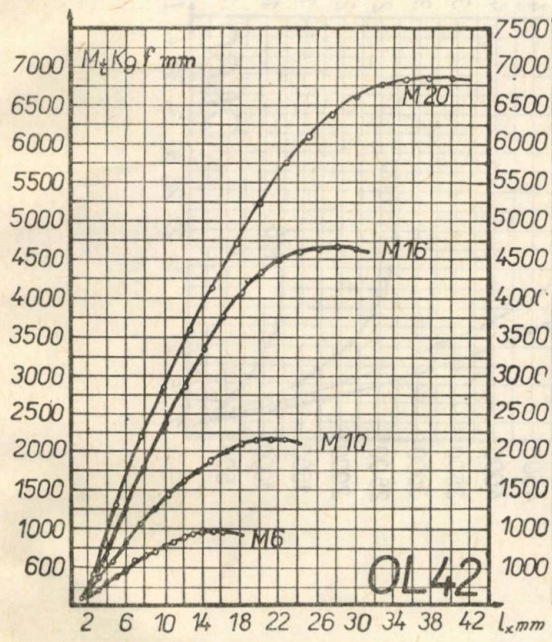


Fig. 3

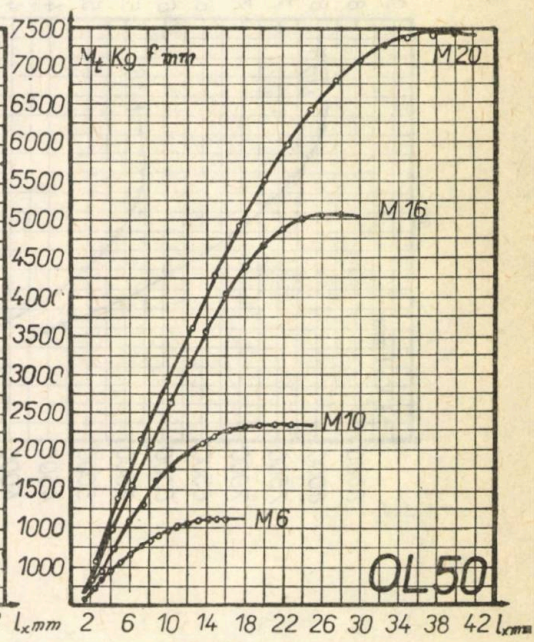


Fig. 4

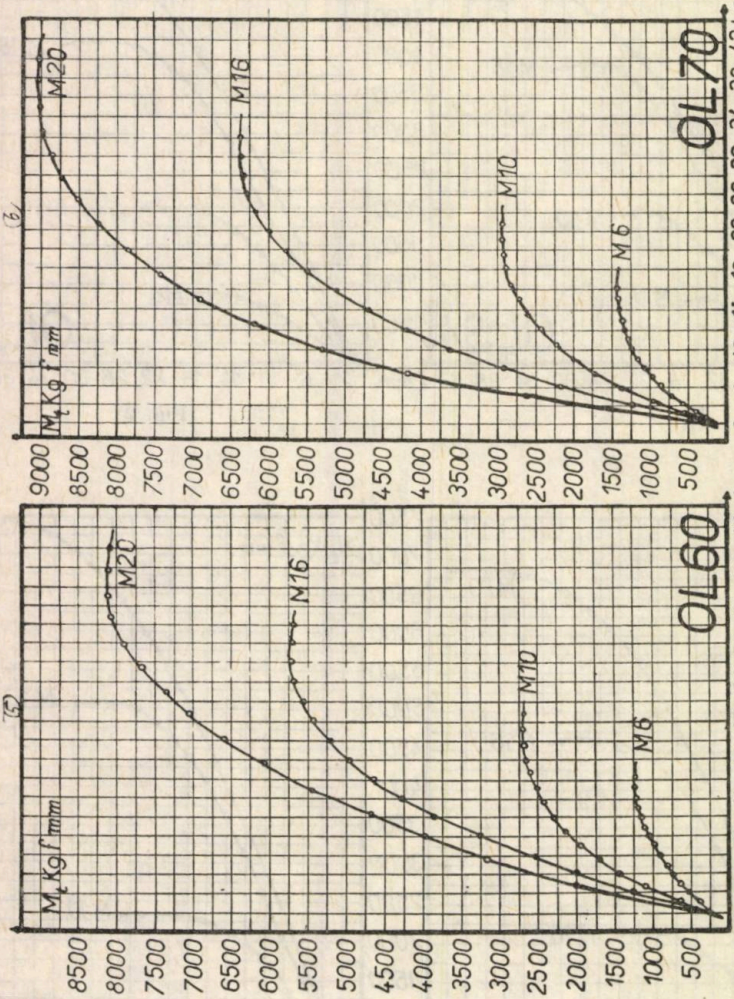

OL60
M20
M16
M10
M6
M_t Kgf mm
l, mm
OL70
M20
M16
M10
M6
M_t Kgf mm
l, mm

Fig. 5

Fig. 6

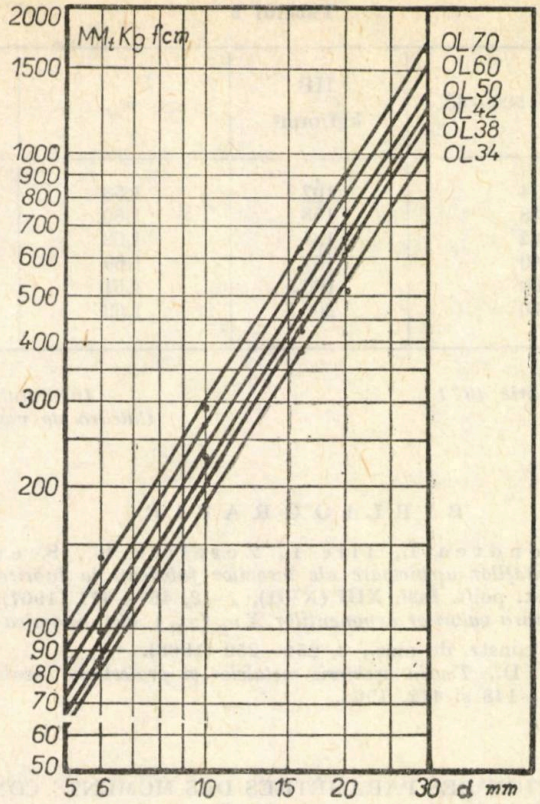


Fig. 7

Fiecare din aceste drepte a furnizat valori pentru constanta C'_M și exponentul x_M, calculate conform relațiilor :

(2) $$M_{t_1} = C'_M D_1^{x_M}, \qquad M_{t_2} = C'_M D_2^{x_M}.$$

Prin logaritmare și scădere se ajunge la :

(3) $$X_M = \frac{\log (M_{t_2}/M_{t_1})}{\log (D_2/D_1)}.$$

Constanta se calculează cu relația :

(4) $$C'_M = \frac{M_t}{D^{x_M}}.$$

S-au obținut astfel valori pentru C'_M și x_M la toate materialele din grupa de oțeluri studiată (tabelul 2).

Tabelul 2

Nr. crt.	Oțel STAS 500—63	HB kgf/mm²	x_M	C'_M
1	OL 34	107	1,53	5,25
2	OL 38	108	1,60	5,09
3	OL 42	135	1,68	4,45
4	OL 50	161	1,69	4,71
5	OL 60	196,5	1,61	6,55
6	OL 70	206,5	1,63	6,71

Primită la 16 septembrie 1971

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de mașini-unelte și scule

BIBLIOGRAFIE

1. Belous V., Condrea I., Ilie I., Zerelles W., Seewaldt H., *Studiul calităților așchietoare ale tarozilor fabricați la fabrica de scule Rîșnov.* Bul. Inst. poiit. Iași, XIII (XVII), *1—2*, 467—471 (1967).
2. Belous V., *Asupra valorilor exponenților* X_{P_Z} (x_M) *din dinamica așchierii metalelor.* Met. și constr. de maș., *3*, 254—259 (1963).
3. Lăzărescu I. D., *Teoria așchierii metalelor și proiectarea sculelor.* EDP, Buc., pp. 147—148 și 472, 1964.

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DES MOMENTS CONCERNANT LES FILETAGES À TARAUD DES ACIERS ROUMAINS

Note I

Les aciers standardisés STAS 500—63

(Résumé)

En utilisant un dispositif à serrer de rattrapage de jeu, spécialement construit, l'auteur établit les valeurs de ces paramètres-ci pour les aciers : OL 34, OL 38, OL 42, OL 50, OL 60 et OL 70, STAS 500-63.

Dans cette Note, les résultats obtenus par voie expérimentale sont représentés sur un diagramme à l'échelle doublement logarithmique, par la fonction $M = C_M D^{x_M} p^{y_M}$. À l'aide d'un tel diagramme on peut facilement déterminer, d'une part, les valeurs des paramètres (tableau 2), et d'autre part, leur influence sur les processus de coupe.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1–2, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.9

DETERMINAREA PARAMETRILOR FORȚEI PRINCIPALE DE AȘCHIERE ÎN PROCESUL DE STRUNJIRE LONGITUDINALĂ A OȚELURILOR ROMÂNEȘTI: GRUPA OȚEL PENTRU CUȚITE, STAS Nr. 1699–50 [1]

DE

AUREL RĂILEANU, EMIL UNCHEȘEL și N. GOJINEȚCHI

În această Notă se dau rezultatele experiențelor făcute de autori pentru a determina valorile exponenților x_P, y_P și a constantei C_P la strunjirea longitudinală a oțelurilor OSL 1, OSL 2, OSL 3 și OSL 4 (7) Cr, furnizate în anul 1966 de Întreprinderea „Industria Sîrmei" — Cîmpia Turzii.

Experiențele au fost executate pe un strung românesc S 3A, folosind cuțite din oțel RW 180, cu următoarea geometrie: $\alpha = 10°$, $\gamma = 25°$, $\lambda = 0°$, $\varkappa = 45°$ și $\varkappa' = 15°$, fără lichide de răcire.

În timpul așchierii cuțitul a fost montat pe un dinamometru tip G. A. Levit, avînd amortizor hidraulic și pîrghia de transmitere legată rigid de amortizor [1], [2].

Pentru determinarea valorilor numerice ale exponenților și constantei din relația:

$$P_Z = C_P\, t^{x_P} s^{y_P}, \tag{1}$$

s-au făcut experiențe la diferite valori pentru t și s, cu trei viteze de tăiere menținute aproximativ constante. S-au calculat valorile medii pentru aceleași valori ale variabilelor t și s la cele trei viteze de tăiere, s-au determinat forțele P_z și apoi s-au trasat, prin puncte, pe diagrame dublulogaritmice, grupele de curbe aproximate cu drepte pentru $t = \text{const}$ și $s = \text{const}$ (fig. 1...4).

În continuare, luînd pe ficcare dreaptă cîte două puncte, s-au determinat valorile exponenților x_P și y_P, folosind relațiile:

---

[1]) Prezentată la sesiunea științifică a Institutului politehnic din Iași, din 28 – 30 septembrie 1967.

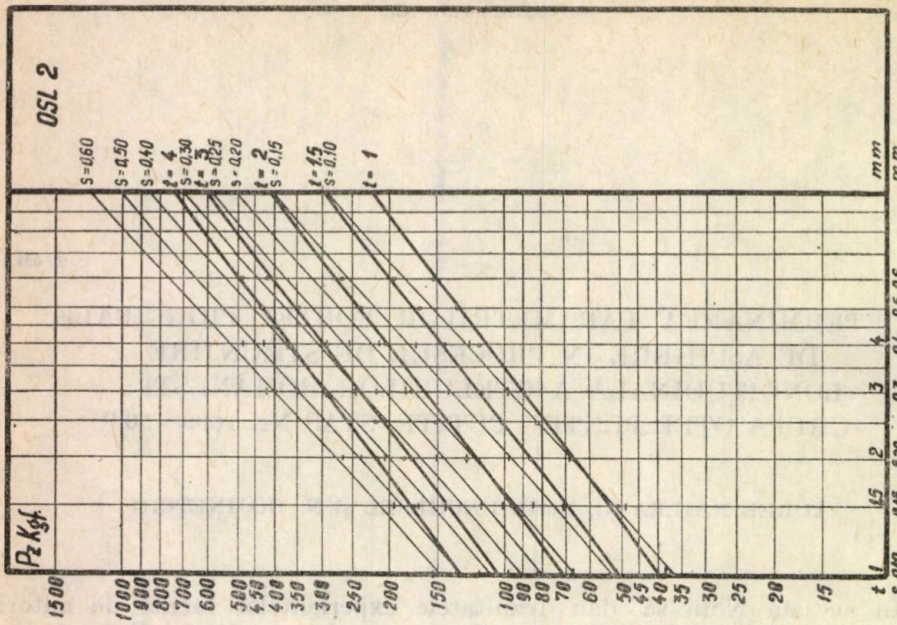

OSL 2
Pz Kgf.
s=0,60
s=0,50
s=0,40
t=4
s=0,30
t=3
s=0,25
s=0,20
t=2
s=0,15
t=1,5
s=0,10
t=1
mm
mm
1500
1000
900
800
700
600
500
450
400
350
300
250
200
150
100
90
80
70
60
50
45
40
35
30
25
20
15
t
s
1
1,5
2
3
4
0,10
0,15
0,20
0,3
0,4
0,5
0,6

Fig. 2

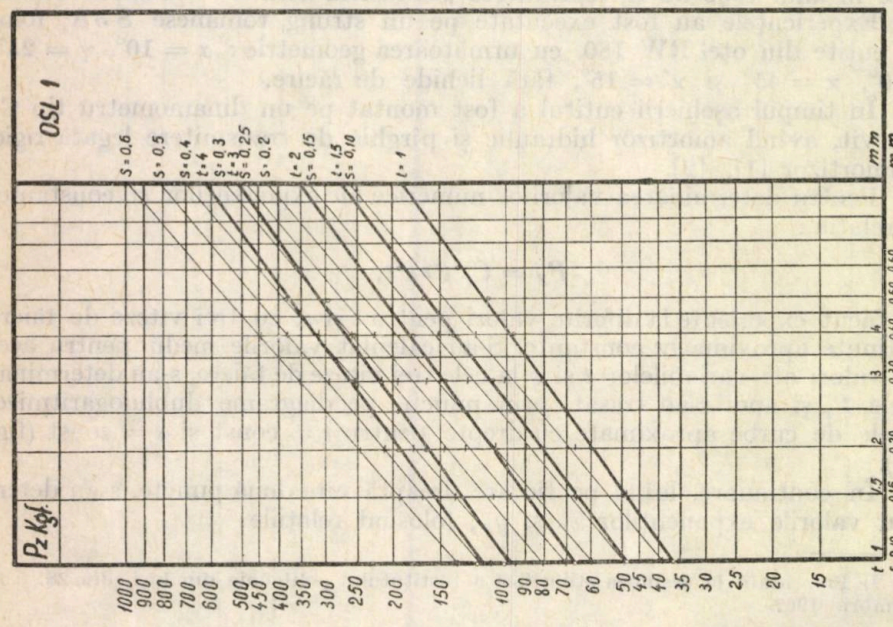

OSL 1
Pz Kgf.
s=0,6
s=0,5
s=0,4
t=4
s=0,3
t=3
s=0,25
s=0,2
t=2
s=0,15
t=1,5
s=0,10
t=1
mm
mm
1000
900
800
700
600
500
450
400
350
300
250
200
150
100
90
80
70
60
50
45
40
35
30
25
20
15
t
s
1
1,5
2
3
4
0,10
0,15
0,20
0,30
0,40
0,50
0,60

Fig. 1

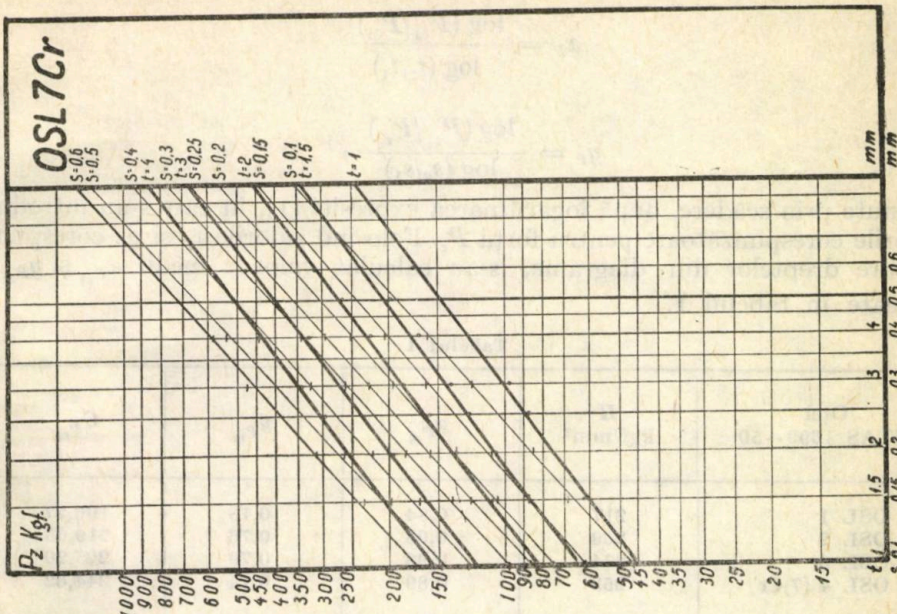

OSL 7Cr
Pz Kgf
S=0.6
S=0.5
S=0.4
t=4
S=0.3
t=3
S=0.25
S=0.2
t=2
S=0.15
S=0.1
t=1.5
t=1
mm
mm

Fig. 4

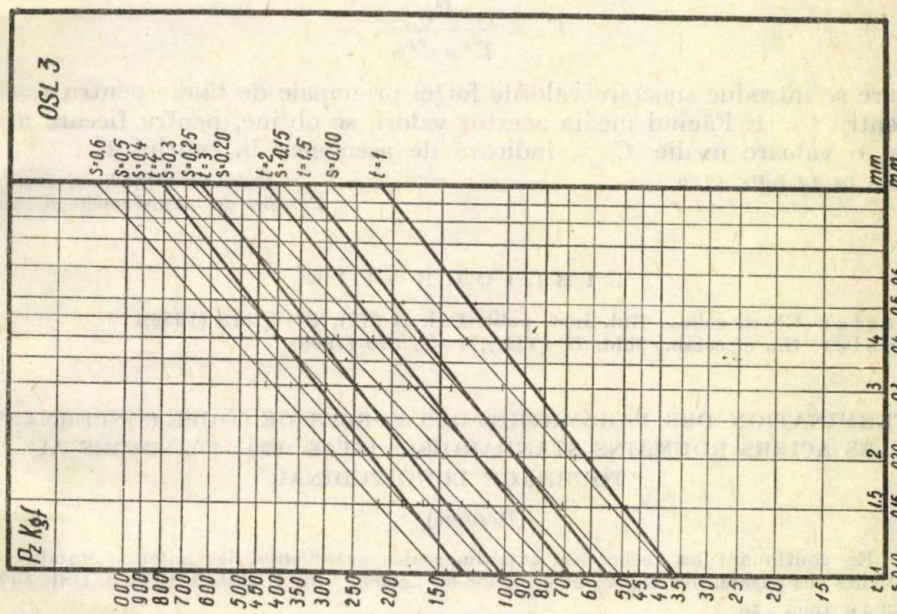

OSL 3
Pz Kgf
S=0.6
S=0.5
S=0.4
t=4
S=0.3
S=0.25
t=3
S=0.20
t=2
S=0.15
t=1.5
S=0.10
t=1
mm
mm

Fig. 3

(2) $$x_P = \frac{\log (P_{z_2}/P_{z_1})}{\log (t_2/t_1)}$$

și

(3) $$y_P = \frac{\log (P'_{z_2}/P'_{z_1})}{\log (s_2/s_1)},$$

obținute prin scădere, după logaritmarea expresiei (1), în care s-au introdus valorile corespunzătoare pentru forța P_z. Folosind valorile x_P și y_P corespunzătoare dreptelor din diagrame, s-au calculat valorile medii x_{P_m} și y_{P_m}, indicate în tabelul 1.

Tabelul 1

Oțel STAS 1699–50	H kgf/mm²	x_{P_m}	y_{P_m}	C_{P_m}
OSL 1	217	0,84	0,73	196,27
OSL 2	269	0,98	0,76	219,65
OSL 3	274	0,93	0,79	225,20
OSL 4 (7)Cr	253	0,89	0,74	244,62

Pentru determinarea constantei C_P se folosește relația:

(4) $$C_P = \frac{P_z}{t^{x_{P_m}} s^{y_{P_m}}},$$

în care se introduc succesiv valorile forței principale de tăiere pentru $s = 1$ și pentru $t = 1$. Făcînd media acestor valori, se obține, pentru fiecare material o valoare medie C_{P_m}, indicată de asemenea în tabelul 1.

Primită la 14 iulie 1970

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de mașini-unelte și scule

BIBLIOGRAFIE

1. Caşler Gh. şi colab., Bul. Inst. polit. Iaşi, II (VI), *3–4*, 313 (1956).
2. Caşler Gh. şi colab., Ibid. IV (VIII), *1–2*, 379 (1958).

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DES FORCES DE COUPE CONCERNANT LES ACIERS ROUMAINS STANDARDISÉS (STAS 1699–50), SOUMIS AU TOURNAGE LONGITUDINAL

(Résumé)

En continuant les recherches expérimentales antérieures, les auteurs établissent les valeurs des paramètres C_P, x_P et y_P pour les aciers : OSL 1, OSL 2, OSL 3, OSL 4 (7) Cr, STAS 1699–50.

F 1812

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

TOMUL XVIII (XXII)

Fasc. 3–4

SECŢIA IV MECANICĂ TEHNICĂ

1973 AUG 21

1972

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

TOMUL XVIII (XXII)

Fasc. 3–4

SECŢIA IV MECANICĂ TEHNICĂ

1972

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. em. dr. doc. GH. ALEXA, prof. em. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CALISTRU,
prof. ing. T. GOLGOȚIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar),
conf. ing. A. MARCHIȘ, prof. dr. doc. D. RUSU,
acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (președinte)

COMITETUL DE REDACȚIE AL SECȚIEI

IV. MECANICĂ TEHNICĂ

Prof. dr. doc. T. FĂRCAȘ
Prof. ing. G. D'ALBON
Conf. ing. CR. LINDE

REDACȚIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)
Conf. dr. ing. ALFRED BRAIER (secretar de redacție)
Șef de lucrări ing. I. CONDREA (secretar de redacție adjunct)
Ing. ANETA BRAIER (redactor)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4 1972

Secţia IV

MECANICĂ TEHNICĂ

SUMAR

Pag.

D. MANGERON, M. N. OĞUZTÖRELI (Canada) şi FLORIN V. POTERAŞU, Probleme de control nesingulare. (II) Metoda ecuaţiei integrale în spaţiu funcţional aplicată la rezolvarea problemelor de optimizare în mecanica corpurilor deformabile (engl., rez. rom.) 9

GH. SILAŞ şi HORST J. KLEPP, Asupra stabilităţii vibraţiilor neliniare cu excitaţie discontinuă prin impulsuri (germ., rez. rom.) . . . 19

ALFRED BRAIER şi GABRIELA NEAGU, Răspunsul frecvenţial al sistemelor de ordinul doi la intrări modulate în amplitudine. (I) Intrări cu modulaţie armonică simplă (engl., rez. rom.). 29

E. M. SHOEMAKER (Canada), Efectele neomogenităţilor asupra marginilor elasto-plastice (engl., rez. rom.) 41

SPIRIDON DELEANU, N. IRIMICIUC şi M. STANCU, Asupra aplicării principiului lui Gauss în dinamica sistemelor de solide rigide cu mase variabile (franc., rez. rom.) 51

A. S. KELZON şi I. N. JURAVLEV (U. R. S. S.), Asupra evaluării cantitative a influenţei parametrilor sistemelor oscilante asupra pulsaţiilor proprii (rusă, rez. rom.) 59

CRISTIAN LINDE, N. IRIMICIUC şi I. IBĂNESCU, Asupra ecuaţiei maşinii reale. (I) Calculul energiei cinetice a maşinii (rom., rez. franc.) 69

CLAUDE BILLOT (Franţa), Vibraţiile unei maşini centrifuge neechilibrate. (I) Rotor montat pe un arbore elastic (franc., rez. rom.) . . 79

CEZAR DUCA şi I. SIMIONESCU, Cinetostatica grupelor conducătoare cu acţionare prin cilindru-piston (I) (rom., rez. engl.) 91

N. G. POPINCEANU, E. N. DIACONESCU şi I. G. BERLEA, Rulmenţi oscilanţi cu role simetrice sau asimetrice ? (engl., rez. rom.) . . . ′ 101

Pag.

M. D. GAFIȚANU și L. T. HOSTIUC, Unele aspecte ale dispersiei durabilității la încercările de rulmenți (engl., rez. rom.) 115

VICTOR BAUȘIC, D. HORBANIUC, IULIAN MIROȘ, COSTACHI GIREADĂ și VALERIAN PALIHOVICI, Studiul prin metoda analogiei electrice a repartiției eforturilor unitare tangențiale la bare cu secțiunea în formă de segment de cerc, supuse la răsucire (germ., rez. rom.) 121

C. CIOBANU, PAUL MATEI, LEONID CIOCAN, ELISABETA BILIUȚĂ, M. RĂDULESCU, ILIE RUSU, D. CHETRARU și GH. JUCAN, Asupra caracteristicilor hidraulice ale tuburilor riflate din PVC (germ., rez. rom.) 129

GÉRARD D'ALBON, Considerații asupra sistemului deductiv pentru stabilirea consecințelor principiului al doilea în termodinamica fenomenologică (II) (rom., rez. franc.) 139

EMIL JUGUREANU, Anomalia termică Jacq în convecția forțată cu aer (franc., rez. rom.) 149

DAN URSESCU și VICTOR ZUBCU, Cercetări asupra modelării prin similitudine a camerelor de ardere pentru turbine cu gaze funcționînd cu combustibil gazos (franc., rez. rom.) 155

MAIER PERLMAN, Cu privire la unele consecințe ale introducerii raportului caracteristic geometro-dinamic în studiul trecerii căldurii la suprafețe cu rugozități artificiale și microaripioare (rom., rez. franc.) 163

SORIN SOPA, Un model fizico-chimic al procesului de autoaprindere în motoarele Diesel (rom., rez. engl.) 171

EMIL GAIGINSCHI, MORITZ REICHER și MIRCEA ZUGRĂVEL, Particularizarea expresiei generale a gradului de perfecție pentru ciclurile teoretice uzuale (rom., rez. rusă) 179

AURELIAN SIMIONESCU, Aplicarea metodelor statistice pentru determinarea parametrilor de ardere a ligniților (engl., rez. rom.) . . . 193

C. PICOȘ, GH. COMAN, ADRIAN CIRILLO și DRAGOȘ PARASCHIV, Influența deformării plastice superficiale prin rulare cu bile asupra rezistenței la uzură a oțelurilor (germ., rez. rom.) 199

VITALIE BELOUS, Rectificarea cilindro-hiperbolică (rom., rez. rusă) 207

I. CONDREA, COSTACHE DRUȚU și GH. LUNGU, Studiul dinamicii adîncirii profilate a alamelor utilizate în construcția coliviilor de rulmenți (rom., rez. franc.) 211

AUREL RĂILEANU și DAN NICOLESCU, Determinarea parametrilor forței principale de așchiere în procesul de strunjire longitudinală la oțelurile românești. (VII) Grupa oțel aliat pentru scule STAS 3 611—61 (rom., rez. franc.) 221

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D.C. 621—50

NON-SINGULAR CONTROL PROBLEMS

II. INTEGRAL EQUATION FUNCTION-SPACE METHOD APPLIED TO THE SOLUTION OF OPTIMIZATION PROBLEMS IN THE MECHANICS OF DEFORMABLE BODIES

BY

D. MANGERON, M. N. OĞUZTÖRELI and FLORIN V. POTERAŞU

To Elie CARAFOLI on his Jubilee Year

1. The authors, starting from the results of their precedent research work published in the last issue of this *Bulletin*, concerning sufficient conditions for the non-negativity of the second variation in problems of non-singular control having as constraints algebraic inequalities containing control inequalities, apply the integral equation function-space method for the determining the optimum shape of a linear element under the form of straight bar subjected to restrictions of stresses and inertia moment.

In what follows we consider the application of the Integral Equation Function-Space Method to the finding of the optimum profile of a straight bar, with restrictions on the stresses and inertia moment. The beam material is assumed to be elastic linear. The reader will kindly refer to our paper [1], [2].

2. The system of the equilibrium equations of the considered problem is of the form

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{X}_1 = lX_2, & \dot{X}_2 = \dfrac{l}{E\alpha u^2} X_3, \\ \dot{X}_3 = lX_4, & \dot{X}_4 = -lp, \end{array}\right. \tag{2.1}$$

where we have introduced the following notations: l is the bar length, p is the transverse loading, generally function of t, t is a dimensionless parameter, i. e., $t = X/l \in [0, 1]$; E is Young's modulus, α is a dimensionless parameter depending on the cross-section shape, u is a control para-

meter, in the present case the cross-section area, and X_1 is the static displacement of the beam (small displacements). The other physical significances of the variables result easily, once the problem is framed in the theory of elasticity. The aspects are, however, quite new.

Boundary conditions (restrictions) are :

(2.2) simply supported or hinged end $X_1 = 0, \quad X_3 = 0$;

(2.3) built-in end $X_1 = 0, \quad X_2 = 0$;

(2.4) free end $X_3 = 0, \quad X_4 = 0$.

Obviously, various conbinations can be made, i. e. : supported end—supported end ; supported end—built-in end ; built-in end—free end ; built-in end—built-in end, and so on.

The compression forces are not taken into account.

The algebraic inequality restrictions containing control are :

$$(2.5) \quad \frac{M}{2b\alpha u} - \sigma \leqslant 0, \qquad (2.6) \quad \frac{3V}{2u} - \tau \leqslant 0, \qquad (2.7) \quad I_0 - \alpha u^2 \leqslant 0$$

where M denotes the bending moment (for statically determinate beams it may be taken in this manner, and for statically indeterminate beams one takes X_3 instead of M) ; V the shear force (for statically determinate beams it may be taken in this manner, and for statically indeterminate beams one takes X_4) ; σ the known allowable normal-unit stress; τ the allowable tangential-unit stress, also known, and I_0 the inertia moment having a value a priori imposed.

The bar considered in this example is of rectangular cross-section, b being its constant width. For the sake of clarity we consider here the simply supported bar (supported end—hinged end), hence statically determinate.

Obviously, one may consider other restrictions on stresses than those considered in this paragraph. Such restrictions may refer to principal unit-stresses, one may consider other failure laws etc.

These restrictions are unilateral. The material has been assumed elastic and isotropic. The performance function chosen consists in the minimum volume

$$(2.8) \quad J = l \int_0^1 u(t)\, \mathrm{d}t.$$

We begin by writing the Hamiltonean

$$H = lu + P_1X_2l + P_2\frac{l}{E\alpha u^2}X_3 + P_3X_4l - plP_4 + M_1\left(\frac{X_3}{2b\alpha u} - \sigma\right) +$$

$$+ M_2\left(\frac{3X_4}{2u} - \tau\right) + M_3(I_0 - \alpha u^2),$$

$$H_u = l - \frac{2l}{E\alpha u^3}P_2X_3 - M_1\frac{X_3}{2b\alpha u^2} - M_2\frac{3X_4}{2u^2} - 2M_3\alpha u,$$

$$H_{X_1} = 0, \quad H_{X_2} = P_1l_1, \quad H_{X_3} = P_2\frac{l}{E\alpha u^2} + M_2\frac{1}{2b\alpha u}, \quad H_{X_4} = P_3l + M_2\frac{3}{2u};$$

$$\dot{P}_1 = 0; \quad \dot{P}_2 = -P_1l; \quad \dot{P}_3 = -\left(P_2\frac{l}{E\alpha u^2} + M_1\frac{1}{2b\alpha u}\right);$$

$$\dot{P}_4 = -\left(P_3l + M_2\frac{3}{2u}\right);$$

$$H_{uu} = \frac{6l}{E\alpha u^4}P_2X_3 + M_1\frac{X_3}{b\alpha u^3} + M_2\frac{3X_4}{u^3} - 2M_3\alpha;$$

$$H_{M_1} = \frac{X_3}{2b\alpha u} - \sigma, \quad H_{M_2} = \frac{3X_4}{2u} - \tau, \quad H_{M_3} = I_0 - \alpha u^2;$$

$$\left.\begin{array}{llll} H_{M_1X_1} = 0, & H_{M_1X_2} = 0, & H_{M_1X_3} = \dfrac{1}{2b\alpha u}, & H_{M_1X_4} = 0, \\ H_{M_2X_1} = 0, & H_{M_2X_2} = 0, & H_{M_2X_3} = 0, & H_{M_2X_4} = \dfrac{3}{2u}, \\ H_{M_3X_1} = 0, & H_{M_3X_2} = 0, & H_{M_3X_3} = 0, & H_{M_3X_4} = 0, \end{array}\right\} H_{MX}; \tag{2.9}$$

$$H_{XX} = 0;$$

$$H_{uX_1} = 0, \quad H_{uX_2} = 0, \quad H_{uX_3} = -\frac{2l}{E\alpha u^3}P_2 - M_1\frac{1}{2b\alpha u^2}, \quad H_{uX_4} = -M_2\frac{3}{2u^2};$$

$$H_{uM_1} = -\frac{X_3}{2b\alpha u^2}, \quad H_{uM_2} = -\frac{3X_4}{2u^2}, \quad H_{uM_3} = -2\alpha u;$$

$$H_{P_1} = X_2l, \quad H_{P_2} = \frac{l}{E\alpha u^2}X_3, \quad H_{P_3} = X_4l, \quad H_{P_4} = -pl;$$

$$H_{P_1u} = 0, \quad H_{P_2u} = -\frac{2l}{E\alpha u^3}X_3, \quad H_{P_3u} = 0, \quad H_{P_4u} = 0;$$

$$\Phi = \nu_1 X_1(1) + \nu_2 X_3(1), \quad \Psi = \eta_1 X_1(0) + \eta_2 X_3(0), \quad P(1) = (\Phi_X)^T;$$

$$\left.\begin{array}{llll} H_{P_1X_1} = 0, & H_{P_1X_2} = l, & H_{P_1X_3} = 0, & H_{P_1X_4} = 0, \\ H_{P_2X_1} = 0, & H_{P_2X_2} = 0, & H_{P_2X_3} = \dfrac{l}{E\alpha u^2}, & H_{P_2X_4} = 0, \\ H_{P_3X_1} = 0, & H_{P_3X_2} = 0, & H_{P_3X_3} = 0, & H_{P_3X_4} = l, \\ H_{P_4X_1} = 0, & H_{P_4X_1} = 0, & H_{P_4X_3} = 0, & H_{P_4X_4} = 0, \end{array}\right\} \quad H_{PX};$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\delta X = (H_{PX})\delta X + (H_{Pu})\delta u, \tag{2.10}$$

or

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\delta x_1}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\delta x_2}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\delta x_3}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\delta x_4}{\mathrm{d}t} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{l}{E\alpha u^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 & u \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \\ \delta x_4 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 0 \\ -\dfrac{2l}{E\alpha u^3} X_3 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \delta u,$$

$$\dot{Y} = -(H_{PX})^T Y, \tag{2.11}$$

$$\left\| \begin{matrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_3 \\ \dot{Y}_4 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{l}{E\alpha u^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{matrix} \right\| .$$

Then, we pass to the calculation of the fundamental matrix of the considered above system, obtained with the aid of Laplace's transform

$$A = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{l}{E\alpha u^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$Q(s) = sI - A = \begin{Vmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ l & s & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{E\alpha u^2} & s & 0 \\ 0 & 0 & l & s \end{Vmatrix}, \quad \det Q(s) = s^4,$$

$$K^T(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{Vmatrix} 1 & -lt & \frac{l^2}{2E\alpha u^2} t^2 & -\frac{l^3}{6E\alpha u^2} t^3 \\ 0 & 1 & -\frac{l}{E\alpha u^2} t & \frac{l^2}{2E\alpha u^2} t^2 \\ 0 & 0 & 1 & -lt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$K(0) = I_4,$$

$\delta X(t)$ is given by

$$\delta X(t) = R(t)\delta w + \int_0^1 S(t, v)\delta u(t)\mathrm{d}v,$$

where we have denoted

$$R(t) = [K^T(t)]^{-1}Y,$$

$$S(t,v) = \begin{cases} [K^T(t)]^{-1}\,[K^T(v)]\,[H_{Pu}(v)], & 0 \leqslant v \leqslant t \leqslant 1, \\ 0 & 0 \leqslant t < v \leqslant 1; \end{cases}$$

$$K(t) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -lt & 1 & 0 & 0 \\ \frac{l^2}{2E\alpha u^2} t^2 & -\frac{l}{E\alpha u^2} t^2 & 1 & 0 \\ -\frac{l^3}{6E\alpha u^2} t^3 & \frac{l^2}{2E\alpha u^2} t^2 & -lt & 1 \end{Vmatrix},$$

$$[K^T(t)]^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & lt & \frac{l^2}{2E\alpha u^2} t^2 & \frac{l^3}{6E\alpha u^2} t^3 \\ 0 & 1 & \frac{l}{E\alpha u^2} t & \frac{l^2}{2E\alpha u^2} t^2 \\ 0 & 0 & 1 & lt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$K^T(v) = \begin{Vmatrix} 1 & -vt & \frac{l^2}{2E\alpha u^2}v^2 & -\frac{l^3}{6E\alpha u^2}v^3 \\ 0 & 1 & -\frac{l}{E\alpha u^2}v & \frac{l^2}{2E\alpha u^2}v^2 \\ 0 & 0 & 1 & -lv \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$S(t,v) = \begin{cases} \begin{Vmatrix} -\frac{2l}{E\alpha u^3}X_3(t-v) \\ -\frac{2l}{E\alpha u^3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, & 0 \leqslant v \leqslant t \leqslant 1, \\ & 0 \leqslant t < v \leqslant 1. \end{cases}$$

Other necessary relations are :

$$V_1^T(t) = H_u(t) = l - \frac{2l}{E\alpha u^3}P_2X_3 - M_1\frac{X_3}{2b\alpha u^2} - M_2\frac{3X_4}{2u^2} - 2M_3\alpha u,$$

$$V_2^T(t) = H_M(t) + \frac{1}{2}Z^T(t)Z_d(t), \qquad V_3^T(t) = M^T(t)\,Z_d(t),$$

$$V_4^T = P^T(0)Y, \qquad V_S^T = \Phi_\nu = L^T, \qquad \Phi_{XX} = 0, \qquad H_{XX} = 0,$$

$$B_1(t) = H_{uX}(t)\,R(t) = \begin{Vmatrix} -\frac{l^2t^2}{2E\alpha u^2}\left(\frac{2l}{E\alpha u^3}P_2 - \frac{1}{2b\alpha u^2}M_1\right) - \frac{l^3t^3}{4E\alpha u^4}M_2 \\ -\frac{lt}{E\alpha u^2}\left(\frac{2l}{E\alpha u^3}P_2 + \frac{1}{2b\alpha u^2}M_1\right) - \frac{3l^2t^2}{4E\alpha u^4}M_2 \\ -\left(\frac{2l}{E\alpha u^3}P_2 + \frac{1}{2b\alpha u^2}M_1\right) - \frac{3lt}{2u^2}M_2 \\ -\frac{3}{2u^2}M_2 \end{Vmatrix} Y(t),$$

$$B_2(t) = S^T(1,\ t)\,\Phi_{X\nu} = \begin{Vmatrix} -\frac{2l^2}{E\alpha u^3}(t-1)X_3 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

where

$$\left.\begin{array}{llll} \Phi_{X_1\nu_1} = 1, & \Phi_{X_1\nu_2} = 0, & \Phi_{X_3\nu_1} = 0, & \Phi_{X_3\nu_2} = 0 \\ \Phi_{X_4\nu_1} = 0, & \Phi_{X_4\nu_2} = 0, & \Phi_{X_4\nu_1} = 0, & \Phi_{X_4\nu_2} = 0 \end{array}\right\}\ \Phi_{X\nu};$$

$$B_3(t) = H_{MX}(t)\, R(t) = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & \frac{1}{2b\alpha u} & \frac{lt}{2b\alpha u} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2u} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| Y(t),$$

$$B_4(t) = 0,$$

$$B_5(t) = R^T(1)\, \Phi_{X\nu} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ l & 0 \\ \frac{l^2}{2E\alpha u^2} & 1 \\ \frac{l^3}{6E\alpha u^2} & l \end{matrix} \right\| Y^T(1), \quad A_{11}(t, s) = 0,$$

$$A_{12}(t, s) = \left\| 0 \quad 0 \quad -\frac{2l^2}{E\alpha u^3} X_3(t - s) \quad -\frac{3l}{E\alpha u^4} \right\|.$$

With these data calculated we get:

$$N_1(t) = (H_{uu}(t))\delta u(t) + (H_{uM}(t))\delta M(t) + B_2(t)\delta\nu + \int_0^1 ds\, (A_{12}(t, s)\delta M(s)),$$

$$N_2(t) = (H_{Mu}(t))\delta u(t) + (Z_d(t))\delta Z(t) + \int_1^0 A_{12}^T(s, t)\, \delta u(s)\, ds,$$

$$N_3(t) = (Z_d(t))\delta M(t) + (M_d(t))\delta Z(t),$$

$$N_4(t) = (B_5^T)\delta\nu + \int_0^1 [B_1^T(s)\delta u(s) + B_3^T(s)\delta M(s)]ds,$$

$$N_5 = \int_0^1 B_2^T(s)\delta u(s)\, ds.$$

The equations which are to be solved in each iteration case are

$$(H_{uu}(t))\delta u(t) + (H_{uM}(t))\delta M(t) + B_2(t)\delta\nu + \int_0^1 ds(A_{12}(t, s)\delta M(s)) = -H_u(t),$$

$$(H_{Mu}(t))\delta u(t)+(Z_d(t))\delta Z(t)+\int_0^1 A_{12}^T(s,t)\delta u(s)\,ds=-\left(H_M(t)+\frac{1}{2}Z^T(t)\,Z_d(t)\right),$$

$$(Z_d(t))\delta M(t)+(M_d(t))\delta Z(t)=-M^T(t)Z_d(t),$$

$$(B_5^T)\delta\nu+\int_0^1[B_1^T(s)\delta u(s)+B_3^T(s)\delta M(s)]ds=-P^T(0)Y,$$

$$\int_0^1 B_2^T(s)\delta u(s)ds=-\Phi_\nu.$$

The interval $0\leqslant t\leqslant 1$ can be divided, for instance, into β equal parts. The integrals are replaced by a simple approximation

$$\int_0^1 f(t)\,dt=\sum_{j=1}^{\beta}\left\{f\left(\frac{j-1}{\beta}\right)\right\}\beta^{-1}.$$

Practically, we choose a norm

$$E_N=\max\left\{|\Phi_\nu|,|P^T(0)Y|,\max_t\left(|H_u|,\left|H_M+\frac{1}{2}Z^T(t)Z_d(t)\right|,|M^T(t)\,Z_d(t)|\right)\right\},$$

which is used as a measure in each iteration. The iteration procedure ends if $E_N\leqslant\omega^{-r}$, where r is the desired value (obviously, depending on the capacity of the computer).

The particular case should be reminded here of thin walled bars when at least two restrictions related to the local and general bar stability may also intervene.

3. *Conclusions.* This metod illustrated by applications opens wide perspectives of applications to the optimum design of elements and systems intervening in the entire mechanics of deformable bodies. Obviously, the method has its limitations. Thus, one cannot approach problems in which the differential equations system for the mathematical modelling of the problem is unstable ; problems in which the dividing step is not taken sufficiently small, etc.

Undoubtedly, in the near future various optimization methods (combinations between the Dynamic programming method and the calculus of variations ; dynamic programming and the principle of maximum, etc.) will be elaborated, which might prove more powerful tools of optimization than those presented here. It is to be expected that the theory of differential games, the methods put forth by D. Mangeron and

M. N. Oguztöreli for the solution of optimization problems of systems with distributed parameters [3]...[5] will open new ways of investigation and will widen substantially the domain of applications.

Received April 15, 1971

Polytechnic Institute, Jassy
and
University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada

REFERENCES

1. Mangeron D., Oguztöreli M. N., Poteraşu V. F., *Non-singular Control Problems.* (I) *Sufficient conditions for non-negativity of the second variation.* Bul. Inst. polit. Iaşi, **XVIII (XXII)**, *1—2*, s. IV (1972).
2. Lastman G. J., *An Integral Equation Function-space Method for Solving Inequality Constrained Optimal Control Problems.* Intern. Journ. Control, **12**, *3*, 511—525 (sept. 1970).
3. Mangeron D., Oguztöreli M. N., Poteraşu V. F., *Sur les systèmes optimaux aux paramètres.* Bull. Acad. R. Sci. Belgique, 5-e série, **LVI**, *7*, 700—706 (1970).
4. Mangeron D., Oguztöreli M. N., *Optimal Problems in Distributed Parameter Control Systems,* (I), (II), (III). Dept. Math., University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada, Series A, **4**, *37*—39 (1968).
5. Oguztöreli M. N., Mangeron D., *Problemi optimali spettanti ai sistemi di controlo con parametri distribuiti,* (I), (II), (III). Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat., ser. 8, **45**, 1—6, 142—146, 236—242 (1968).

PROBLEME DE CONTROL NESINGULARE

II. Metoda ecuaţiei integrale în spaţiu funcţional aplicată la rezolvarea problemelor de optimizare în Mecanica corpurilor deformabile

(Rezumat)

Autorii, luînd ca punct de plecare rezultatele expuse în lucrarea lor anterioară [1], inserată în acelaşi *Buletin*, aplică metoda ecuaţiei integrale în spaţiu funcţional la determinarea formei optime a elementelor liniare în formă de bară dreaptă supusă la restricţii privitoare la eforturi unitare şi la momente de inerţie.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D.K. 534.01

ÜBER DIE STABILITÄT NICHTLINEARER SCHWINGUNGEN MIT UNSTETIGER ERREGUNG DURCH STOSSIMPULSE

VON

GH. SILAŞ und HORST J. KLEPP

1. Einleitung

In den Beiträgen [2], [3] werden für Systeme mit nichtlinearer Kennlinie Zwangsschwingungen untersucht, welche durch einfache Formen periodischer Erregung entstehen, wie Erregung durch periodische Stösse oder schrittweise konstante periodische Kräfte, welche an Stelle der harmonischen Zwangskraft gesetzt werden. Dedurch wird ein heteronomes Problem, welches nur näherungsweise untersucht werden kann, durch eine Reihenfolge autonomer Probleme ersetzt, deren Studium leichter ist. Bestimmt man den Wert des Stossimpulses, indem man fordert, dass der Impuls, den die harmonische Kraft über eine Halbperiode hervorbringt, mit dem Impuls der Stosserregung übereinstimmt, so ist eine Verbindung mit der harmonisch erregten Schwingung hergestellt.

Insbesondere wurden in [2] unter den möglichen Bewegungsformen die periodischen Schwingungsvorgänge untersucht, welche sich in der Phasenebene $(x,\ y = x')$ als geschlossene Kurvenzüge darstellen lassen. Je nachdem ob diese Phasenkurven aus 2 oder $2n$ Kurvenbögen zusammengesetzt sind, bezeichnet man die entsprechende Bewegung als harmonisch zur Zwangskraft oder für $n > 1$ als subharmonisch von der Ordnung $1/n$. In [3] wurden für verschiedene nichtlineare Kennlinien die zur Erregung harmonischen Bewegungen untersucht. Der Erregung mit der Periode $T = 2\pi/\eta$ entsprechende Anfangsbedingungen x^*, y^* wurden bestimmt, damit eine zur Erregung harmonische Bewegung entsteht.

In [2], [3] wird die Stabilität der gefundenen Lösungen nicht untersucht. Es stellt sich aber die Frag-, was für eine Bewegung der Verband beschreibt, wenn die Anfangsbedingungen nicht x^*, y^* sind, sondern $x^* + \alpha$, $y^* + \beta$, hier sind α und β kleine Werte. Das Studium dieser Nachbar-

bewegung mit gestörten Anfangsbedingungen erlaubt es die Stabilität der periodischen Grundschwingung zu bestimmen.

Entfernt sich die Phasenkurve welche den gestörten Anfangsbedingungen entspricht, von der geschlossenen Phasenkurve welche den Anfangsbedingungen entspricht, damit eine zur Erregung harmonischen Bewegung entsteht, so ist die periodische Grundschwingung instabil.

Die in [2], [3] enthaltenen Resonanzdiagramme zeigen im nichtlinearen Fall *abgebogene* Resonanzkurven, woraus man auf Instabilität einiger periodischer Bewegungen schliessen kann.

Aus den in [2], [3] enthaltenen Resonanzkurven ist ersichtlich, dass einer nichtlinearen Kennlinie bei bestimmter Erregung ($T = 2\pi/\eta$) mehrere Bewegungen entsprechen, welche harmonisch zur Erregung sind. Diese sind in Phase oder Gegenphase zur Erregung, und K a u d e r e r [2] nimmt an, dass diese Bewegungen abwechselnd stabil und istabil sind. B l a s e r [3] untersucht nicht die Stabilitat oder Labilität der gefundenen Lösungen. Dazu wird nur bemerkt, dass die bekannten Ergebnisse über Stabilität nicht ohne weiteres übertragen werden können, da in diesem Fall keine Näherungslösungen, sondern exakte Lösungen bestimmt wurden.

2. Überlineare Kennlinie

Eine Resonanzkurve für den Fall überlinearer Kennlinien mit periodischer Stosserregung ist im Abb. 1 dargestellt [3]. Die Bewegungen im Bereiche $I-II-III$ sind in Gegenphase zur Erregung, jene im Bereiche $IV-V$ sind in Phase zur Erregung.

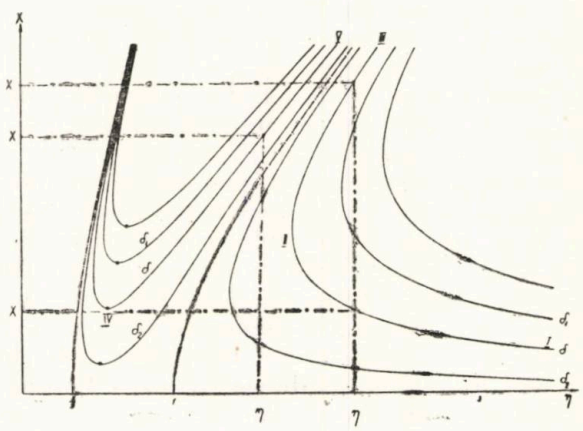


Abb. 1

2.1. Bewegungen in Gegenphase zur Erregung

Anfangs betrachten wir die Bewegungen welche durch die Kurve $I-II-III$ dargestellt und für bestimmte Werte der Periode $T = 2\pi/\eta$ des Stossimpulses δ und der Amplitude X definiert sind. Im Bereiche $I-II$ entspricht einer Erregung mit derselben Periode T und $\delta_1 > \delta$ eine zur Erregung harmonischen Bewegung mit einer Amplitude welche grösser ist als X, im Bereich $II-III$ dagegen ist die Amplitude der zur Erregung harmonischen Bewegung kleiner als X.

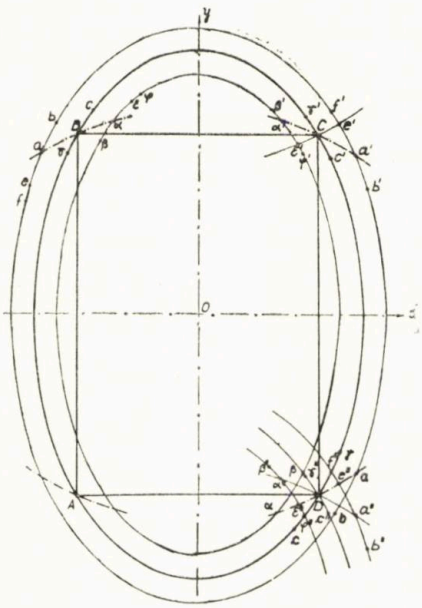


Abb. 2

Die Phasenkurve einer Bewegung, in Gegenphase und harmonisch zur Erregung, ist in Abb. 2 dargestellt. Im Punkt A mit den Koordinaten $(-X, -\delta/2)$ wirkt der Stoss δ.

Der Phasenpunkt springt nach B und läuft in der Zeit $T/2$ nach C. Dann wirkt der negative Stoss und der Phasenpunkt springt nach D und läuft dann im Zeitinterval $T/2$ nach A. Weiter wiederholt sich der Bewegungsvorgang. Den Kurvenabschnitten BC und BA antspricht die freie Bewegung des Verbandes zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stössen. Beginnt die Bewegung mit gestörten Anfangsbedingungen, sodass nach dem ersten Stoss die Koordinaten $x_0 = -X + \alpha_1$ und $y_0 = \delta/2 + \beta_1$ sind so entspricht dieser Bewegung eine Phasenkurve welche in der ersten Halbperiode sich entweder innerhalb oder ausserhalb der periodischen Grund-

schwingung entsprechenden Phasenkurve befindet. Pärtikulären Anfangsbedingungen können auch Phasenpunkte entsprechen, welche sich auf den Kurvenbögen Bc oder $B\gamma$ befinden. In diesem Fall sind die Phasenkurven der gestörten Bewegung und der periodischen Grundschwingung in der ersten Halbperiode identisch.

Befindet sich der Phasenpunkt der Bewegung mit gestörten Anfangsbedingungen nach einem Stoss in einem Bereich um den Punkt B (bzw. D) so gelangt er nach der nächsten Halbperiode (nach dem Ablauf von $T/2$ und dem nächsten Stoss) in einen Bereich um den Punkt D (bzw. B). Das Bewegungsstudium reduziert sich im Phasenplan auf eine Transformation der Punkte des Bereiches um B in Punkte um D und umgekehrt. Die Gleichungen welche die Punkttransformation $B \rightarrow D$, bzw. $D \rightarrow B$ definieren sind identisch.

Die Punkte des Phasenplanes welche die Anfangsbedingungen oder Positionen des Phasenpunktes vor und nach dem Stoss darstellen, damit eine zur Erregung harmonische Bewegung mit $T = 2\pi/\eta$ entsteht, welche in Gegenphase zur Erregung ist, mit Amplituden aus dem Bereiche $II-III$ (Abb. 1), sind in Abb. 4 als Strich-Punkt-Kurven dargestellt. Die Kurvenbögen BC, DA, aa', $\alpha\alpha'$ werden in der Zeit $T/2$ durchlaufen.

Diese Strich-Punkt Kurven und die Phasenkurve der periodischen Grundschwingung bestimmen um B und D je vier Bereiche welche sich entsprechen.

Sind die Phasenpunkte der Anfangsbedingungen um B einer gestörten Bewegung a, b order c, so transformieren sich diese Punkte nach eine Halbperiode in Punkte, welche sich in demselben Bereich um D befinden, aber mit grösserer Amplitude. Nach der nächsten Halbperiode gelangen diese Phasenpunkte in denselben Bereich um B aber mit grösserer Amplitude als um D. Nach jeder folgenden Halbperiode wird die Amplitude der Bewegung grösser. ($\{a(B)\,;\ b(B)\,;\ c(B)\} \rightarrow b(D) \rightarrow b(B) \rightarrow b(D)$ ... mit grösser werdender Amplitude). Es folgt, dass sich die Phasenkurven der Bewegungen mit gestörten Anfangsbedingungen um B, aus dem Bereich ausserhalb der Phasenkurve der periodischen Grundschwingung und oberhalb der Strich-Punkt Kurve, von der Phasenkurve der periodischen Grundschwingung entfernen und dass dieser ein Instabilitätsbereich ist.

Die Phasenpunkte der Anfangsbedingungen um B in α, β oder γ transformieren sich in Punkte um D in demselben Bereich, mit kleinerer Amplitude.

Die Phasenkurven dieser Bewegungen verlaufen innerhalb und entfernen sich von der Phasenkurve der periodischen Grundschwingung, sodass der Bereich innerhalb der Phasenkurve der periodischen Grundschwingung und unterhalb der Strich-Punkt Kurve ein Instabilitätsbereich ist

$$(\{\alpha(B)\,;\quad \beta(B)\,;\quad \gamma(B)\} \rightarrow \beta(D) \rightarrow \beta(B) \rightarrow \beta(D) \ldots$$

mit kleiner werdenden Amplitude).

Die Punkte e und f (ε und φ) transformieren sich in Punkte um D welche auf den Grenzen der Instabilitätsbereiche liegen.

$$[e(B) \rightarrow a(D) \rightarrow b(B) \ldots . ; \quad f(B) \rightarrow \gamma(D) \rightarrow \beta(B) \ldots . ;$$
$$\varepsilon(B) \rightarrow \alpha(D) \rightarrow \beta(B) \ldots . ; \quad \varphi(B) \rightarrow c(D) \rightarrow b(B) \ldots].$$

Für Anfangsbedingungen auf dem Kurvenbogen $\alpha\varepsilon$ wird die Amplitude der Bewegung nach der ersten Halbperiode grösser. Nach der zweiten Halbperiode gelangt der Phasenpunkt in ein Instabilitätsbereich um B und die Amplitude der Bewegung wird dann nach jeder Halbperiode kleiner.

Für Anfangsbedingungen auf der Phasenkurve innerhalb jener, welche der periodischen Grundbewegung entspricht, oberhalb des Punktes φ werden die Amplitude in der ersten Halbperiode grösser. Nach der zweiten Halbperiode gelangt der Phasenpunkt in ein Instabilitätsbereich und die Amplituden werden nach jeder weiteren Halbperiode grösser.

Auf dem Kurvenbogen $\varepsilon\varphi$ gibt es zwei Punkte welche solchen Anfangsbedingungen entsprechen damit in den ersten zwei Halbperioden die Amplituden grösser werden aber nach der dritten Halbperiode gelangt der entsprechende Phasenpunkt in ein Instabilitätsbereich mit grösser bzw. kleiner werdenden Amplituden. Setzt man diese Überlegungen fort, so gelangt man zur Schlussfolgerung, dass es auf jeder inneren Phasenkurve ein Phasenpunkt gibt welcher bestimmten Anfangsbedingungen, mit der Amplitude kleiner als X, entspricht und für welche die Amplitude der Bewegung dem Wert X zustrebt. Für jede von diesem Punkt verschiedene Anfangsbedingungen auf der inneren Phasenkurve entspricht eine Bewegung welche sich nach einer gewissen Anzahl von Halbperioden von der periodischen Grundschwingung entfernt.

Ähnlich verläuft die Bewegung mit Anfangsbedingungen ausserhalb der periodischen Grundschwingung entsprechenden Phasenkurve. Für Anfangsbedingungen auf *ae* wird die Amplitude in der ersten Halbperiode kleiner aber in den nächsten und folgenden Halbperioden grösser. Befindet sich der Phasenpunkt der Anfangsbedingung unterhalb von f so werden die Amplituden nach jeder Halbperiode kleiner. Auf jeder Phasenkurve ausserhalb der, welche der periodischen Grundschwingung entspricht, begrenzt ein Punkt die Bereiche mit grösser und kleiner werdenden Amplituden. Alle diese Punkte um B befinden sich auf einer Kurve, welche durch B geht. Für jedwelche gestörten Anfangsbedingungen um B welche sich nicht auf dieser Kurve befinden, entfernen sich die Bewegungen von der periodischen Grundschwingung. Das bedeutet, dass *die Schwingungen in Gegenphase und harmonisch zur Erregung mit Amplituden X aus dem Bereiche II—III (Abb. 1) nicht stabil sind.*

Jetzt betrachten wir eine Schwingung in Gegenphase und harmonisch zur Erregung mit Amplituden aus dem Bereiche $I—II$ (Abb. 1). Die Punkte des Phasenplans, welche Anfangsbedingungen oder Positionen des Phasenpunktes von und nach dem Stoss darstellen, damit eine zur Erre-

gung harmonische Bewegung entsteht, (Periode T) welche in Gegenphase zur Erregung ist, sind in Abb. 3 als Strich-Punkt-Kurven dargestellt. Einem bestimmten Stossimpuls entspricht bei gegebenem T ein bestimmter Wert X im Bereiche $I—II$. Aus Abb. 1 ist ersichtlich, dass einem $\delta_1 > \delta$ eine Bewegung mit einer Amplitude $X_1 > X$ entspricht damit eine periodische Bewegung mit $T = 2\pi/\eta$ entsteht. Für Anfangsbedingungen mit Amplituden kleiner als X, welche durch die Phasenpunkte α, β, γ dargestellt sind, ist aus Abb. 3 ersichtlich, dass die Amplitude nach

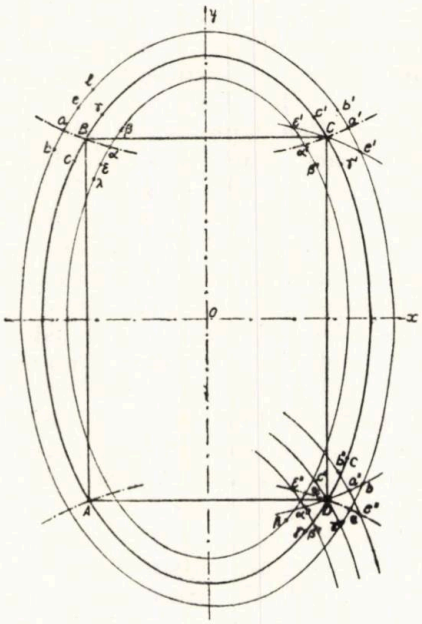


Abb. 3

der ersten Halbperiode für α konstant bleibt, und für β und γ grösser wird. Sind die Phasenpunkte der Anfangsbedingungen a, b, c, mit Amplituden grösser als X so bleibt nach einer Halbperiode die Amplitude für a konstant und wird für b und c kleiner. Für Anfangsbedingungen im Bereiche innerhalb (bzw. ausserhalb) der Phasenkurve der periodischen Grundschwingung und oberhalb (bzw. unterhalb) der Strich-Punkt-Kurve werden die Amplituden in der ersten Halbperiode grösser (bzw. kleiner). Diese Bereiche können auch um D betrachtet werden. Wir bezeichnen mit ε (bzw. e) die Punkte um B welche sich in der ersten Halbperiode in Grenzpunkte dieser Bereiche um D transformieren. Beginnt die Bewegung mit Anfangsbedingungen auf $\alpha\varepsilon$ so wird die Amplitude nach der ersten Halb-

periode kleiner und der Phasenpunkt der Bewegung gelangt um D in so ein Bereich, sodass nach der zweiten Halbperiode die Amplituden grösser werden. Bezeichnet man mit λ den Phasenpunkt um B welcher sich nach einem Stoss in einem Punkt ε um D transformiert, so entsprechen den Anfangsbedingungen auf dem Bogen $\varepsilon\lambda$ Bewegungen deren Amplituden in den ersten zwei Halbperioden kleiner, in der dritten Halbperiode aber grösser werden. Unterhalb von λ auf der inneren Phasenkurve gibt es Anfangsphasenpunkte für welche die Amplitude in dem ersten drei, vier, usw. Halbperioden kleiner, aber in den folgenden Halbperioden grösser werden.

Ähnlich verläuft die Bewegung mit Anfangsbedingungen auf der äusseren Phasenkurve (Kurvenbogen *ae*, *el*,...) nur das die Amplituden zuerst grösser und nacher kleiner werden. Betrachtet man um B die Bereiche welche durch die, der periodischen Grundbewegung entsprechenden Phasenkurve und der Strich-Punkt-Kurve begrenzt sind so folgt, dass für Anfangsbedingungen im Bereich welcher β enthält die Amplituden grösser werden und der Phasenpunkt welcher der Bewegung entspricht zuerst in ein Bereich gelangt welcher e enthält und dann in ein Bereich mit b. Weiter werden die Amplituden kleiner und der Phasenpunkt gelangt dann in ein Bereich mit ε und nach einigen Halbperioden in ein Bereich mit β.

$$[\beta(B) \rightarrow e(D) \rightarrow b(B) \rightarrow \varepsilon(D) \rightarrow \beta(B) \ldots.].$$

Die Bewegung mit den gestörten Anfangsbedingungen verläuft in der Nähe der periodischen Grundschwingung für jedwelche gestörten Anfangsbedingungen, welche nicht zu weit von B entfernt sind. Daraus folgt, dass *die zur Erregung harmonische Bewegung welche in Gegenphase zur Erregung ist, mit Amplituden aus dem Bereich I—II (Abb. 1), stabil ist.*

2.2. Bewegungen in Phase zur Erregung

Die Phasenkurve einer Bewegung harmonisch und in Phase zur Erregung ist in Abb. 4 dargestellt. Nach dem positiven Stoss mit dem Impuls δ springt der Phasenpunkt von A nach B. In der folgenden Halbperiode beschreibt der Phasenpunkt $BEADFC$. In C wirkt der negative Stoss und der Punkt springt über G nach D. In der nächsten Halbperiode ähnelt die Bewegung der in B begonnenen.

Wenn δ und X einer periodischen Schwingung mit der Periode $T = 2\pi/\eta$ entsprechen, so folgt aus Abb. 1. Bereich $IV-V$, dass einem $\delta_1 > \delta$ ein $X_1 > X$ für denselben Wert für T entspricht. Die Punkte des Phasenplanes welche Positionen des Phasenpunktes vor und nach dem Stoss darstellen, damit eine zur Erregung harmonische Bewegung mit der Periode T entsteht, sind in Abb. 4 als Strich-Punkt-Kurven dargestellt. Sind die Anfangsbedingungen α, β, γ, also mit Amplituden kleiner als $x^* = X$ so folgt aus Abb. 4, dass in der ersten Halbperiode die Amplituden grösser werden. Für die Anfangsbedingungen a, b, c auf der äusseren Phasenkurve,

mit Amplituden grösser als X, werden die Amplituden nach der ersten Halbperiode kleiner.

Bezeichnet man mit ε (bzw. e) den Phasenpunkt um B welcher sich in einen Punkt α (bzw. a) des Bereiches um D transformiert, und λ (bzw. l) ein Punkt um B welcher sich in einen Punkt ε (bzw. e) des Bereiches D verwandelt so folgt, dass für Anfangsbedingungen auf dem Bogen $(\alpha\varepsilon)$, $(\varepsilon\lambda)$ ... [bzw. (ae) (el)...] die Amplituden nach der ersten, zweiten ,.... Halbperiode kleiner (bzw. grösser) werden und dann der Phasenpunkt in ein Bereich mit grösser (bzw. kleiner) werdenden Amplituden gelangt.

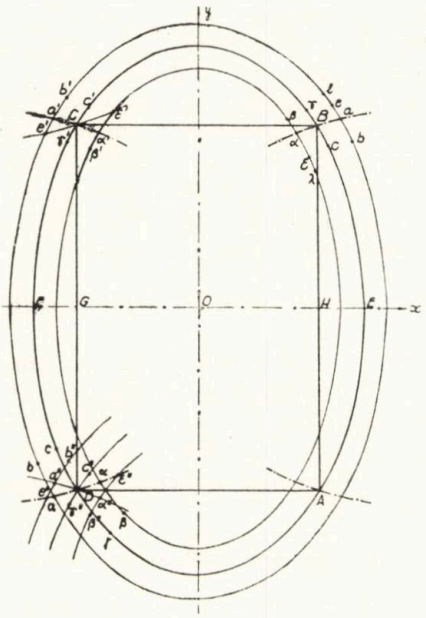


Abb. 4

Für jedwelche gestörten Anfangsbedingungen um B verläuft die Bewegung in der Nähe der periodischen Grundschwingung. Daraus folgt, dass *die Bewegung harmonisch und in Phase zur Erregung mit Amplituden aus dem Bereich IV—V (Abb. 1) stabil ist.*

3. Unterlineare Kennlinien

Ein Resonanzdiagramm für den Fall einer unterlinearen Kennlinie ist in Abb. 5 [3] dargestellt. Ausser den in Abb. 1 existierenden, gibt es hier den Bereich *VI—VII* von Amplituden, welche einer Bewegung harmonisch und in Phase zur Erregung entsprechen. Wenn für eine perio-

dische Grundschwingung die Werte T, δ und X gelten, so entspricht für T, $\delta_1 > \delta$ eine Amplitude $X_1 < X$. Die Punkte welche Positionen des Phasenpunktes vor und nach den Stössen darstellen damit eine periodische

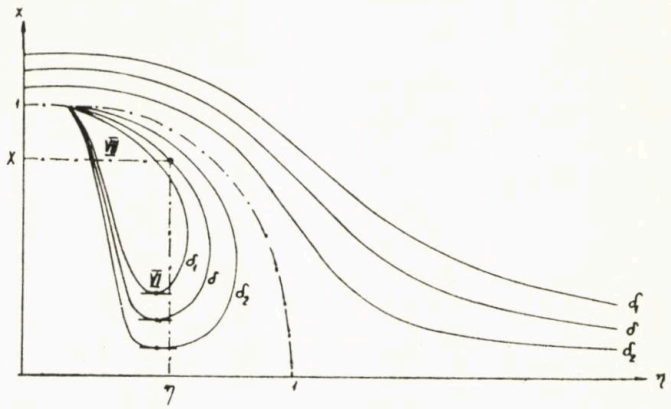


Abb. 5

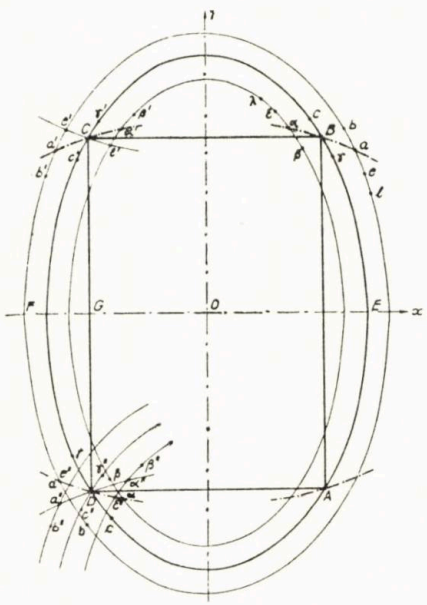


Abb. 6

Grundschwingung entsteht sind in Abb. 6 als Strich-Punkt Kurven eingezeichnet. Sind die Anfangsbedingungen um B auf dem Bogen ab und Bc so werden die Amplituden nach jeder Halbperiode grösser, für

Anfangsbedingungen auf $\alpha\beta$ und $B\gamma$ werden die Amplituden immer kleiner. Wenn sich die Phasenpunkte auf den Bögen (*ae*), (*el*),... bzw. ($\alpha\varepsilon$), ($\varepsilon\gamma$),... befinden, so werden die Amplituden nach der ersten, zweiten, usw. Halbperiode kleiner bzw. grösser, nacher aber entfernen sich die Bewegungen von der periodischen Grundschwingung mit grösser bzw. kleiner werdenden Amplituden.

Daraus folgt, dass *die Bewegungen harmonisch und in Phase zur Stosserregung, mit Amplituden aus dem Bereich VI—VII (Abb. 5) nicht stabil sind.*

Eingegangen am 25. März 1972

Technische Hochschule,
Timişoara

LITERATURVERZEICHNIS

1. Kauderer H., *Nichtlineare Mechanik.* Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1958.
2. Kauderer H., *Über nichtlineare Schwingungen mit unstetiger Erregung.* Ingenieur—Archiv, **XXVIII**, 154—167 (1969).
3. Blaser A., *Nichtlineare Schwingungen mit unstetiger Erregung.* Dissertation, Technische Hochschule Hannover, 1960.

ASUPRA STABILITĂŢII VIBRAŢIILOR NELINIARE CU EXCITAŢIE DISCONTINUĂ PRIN IMPULSURI

(Rezumat)

Analiza stabilităţii vibraţiilor neliniare cu excitaţie discontinuă prin impulsuri este redusă la studiul unei transformări punctuale în planul fazelor. Din comportarea punctelor de fază a mişcărilor cu condiţiile iniţiale perturbate se deduce stabilitatea sau instabilitatea mişcărilor reprezentate în diagramele de rezonanţă caracteristice acestui mod de excitaţie.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. C. 621—50

FREQUENCY RESPONSE OF SECOND ORDER SYSTEMS TO AMPLITUDE MODULATED INPUTS

I. SIMPLE HARMONIC MODULATED INPUTS

BY

ALFRED BRAIER and GABRIELA NEAGU

1. Introduction

1.1. The frequency response of first order systems to some important amplitude modulated inputs, has been investigated in [1]...[3], using the symbolic representation of such input signals by the elements of some algebras on the real field (see [4]...[6]).

The transfer function of a second order system may be written ([7], [8])

$$W(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}, \tag{1}$$

where $T > 0$ is a time constant, $\zeta \geqslant 0$ — the damping constant and s — the complex variable occuring in Laplace transform.

We shall study now the steady-state response of a second order system (1) to a simple harmonic amplitude modulated signal

$$x_{(i)}(t) = X e^{\delta t} \sin(pt + \psi) \sin(\omega t + \varphi), \tag{2}$$

where X, δ, p, ω, ψ and φ are constant quantities and $p < \omega$.

1.2. We know [1] that the function

$$f(t) = [X \sin(pt + \psi) \sin(\omega t + \varphi) + Y \cos(pt + \psi) \cos(\omega t + \varphi)] e^{\delta t} \tag{3}$$

can be represented symbolically by the hypercomplex number

$$\hat{w} = a_1 + a_2 \mathbf{i} + a_3 \mathbf{j} + a_4 \mathbf{ij}, \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = -1, \quad (\mathbf{ij})^2 = (\mathbf{ji})^2 = 1, \tag{4}$$

with the derivation operator

(5) $$\hat{d} = \delta + p\,\mathbf{i} + \omega\,\mathbf{j}.$$

(That means that to the derivation with respect to t of function (3) corresponds the element $\hat{d}\,\hat{w}$, obtained according to the rules (4_2); the commutative and associative algebra (4) was called the $\mathcal{P}$-polynions algebra).

The components of the hypercomplex number (4_1) are

(6) $$\begin{cases} a_1 = X\cos\psi\cos\varphi + Y\sin\psi\sin\varphi, & a_3 = X\cos\psi\sin\varphi - Y\sin\psi\cos\varphi, \\ a_2 = X\sin\psi\cos\varphi - Y\cos\psi\sin\varphi, & a_4 = X\sin\psi\sin\varphi + Y\cos\psi\cos\varphi, \end{cases}$$

and its exponential form is

7) $$\hat{w} = (X + Y\,\mathbf{ij})\,e^{\mathbf{i}\psi}\,e^{\mathbf{j}\varphi}.$$

We obtain for the inverse element ($X \neq \pm Y$)

(8) $$\frac{1}{\hat{w}} = \frac{1}{X^2 - Y^2}(X - Y\,\mathbf{ij})\,e^{-\mathbf{i}\psi}\,e^{-\mathbf{j}\varphi}.$$

The connection between the quantities involved in (6) and (7) are given by

(9) $$X,\ Y = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(a_1 + a_4)^2 + (a_2 - a_3)^2} \pm \sqrt{(a_1 - a_4)^2 + (a_2 + a_3)^2}\ \right],$$

(10) $$\begin{cases} \tan\psi = \dfrac{a_4 X - a_1 Y}{a_3 X + a_2 Y}\left(= \dfrac{a_2 X + a_3 Y}{a_1 X - a_4 Y}\right), \\ \tan\varphi = \dfrac{a_3 X + a_2 Y}{a_1 X - a_4 Y}\left(= \dfrac{a_4 X - a_1 Y}{a_2 X + a_3 Y}\right). \end{cases}$$

The hypercomplex number with

(1) $$a_1 a_4 - a_2 a_3 = 0$$

is a special $\mathcal{P}$-polynion, representing signal (2), where $Y = 0$ and

(12) $$X = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}, \qquad \tan\psi = \frac{a_4}{a_3}, \qquad \tan\varphi = \frac{a_3}{a_1}.$$

Finally, the divisors of zero in that algebra are characterized by $X = \pm Y$, i.e.

(13) $$a_1 - a_4 = 0,\quad a_2 + a_3 = 0 \qquad \text{or} \qquad a_1 + a_4 = 0,\quad a_2 - a_3 = 0.$$

Let denote

(14) $$a_1 + a_4 = \alpha_1,\quad a_1 - a_4 = \alpha_2,\quad a_3 + a_2 = \alpha_3,\quad a_3 - a_2 = \alpha_4.$$

Then, by (9) (10)

$$(15)\qquad \begin{cases} X,\ Y = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_4^2} \pm \sqrt{\alpha_2^2+\alpha_3^2}\right), \\ \operatorname{tan}\psi = \dfrac{\alpha_1\sqrt{\alpha_2^2+\alpha_3^2} - \alpha_2\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_4^2}}{\alpha_4\sqrt{\alpha_2^2+\alpha_3^2} + \alpha_3\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_4^2}}, \\ \operatorname{tan}\varphi = \dfrac{\alpha_4\sqrt{\alpha_2^2+\alpha_3^2} + \alpha_3\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_4^2}}{\alpha_1\sqrt{\alpha_2^2+\alpha_3^2} + \alpha_2\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_4^2}}. \end{cases}$$

The inverse element of $\widehat{w}$ (7) is

$$(16)\qquad \widehat{w}^{-1} = \frac{X - Y\mathrm{ij}}{X^2 - Y^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} = (X' + Y'\mathrm{ij})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi},$$

where according to (15_1)

$$(17)\qquad X',\ Y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_4^2}} \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha_2^2+\alpha_3^2}}\right).$$

Let now multiply relations (10):

$$\operatorname{tan}\psi\,\operatorname{tan}\varphi = \frac{a_3X + a_2Y}{a_1X - a_4Y}\,\frac{a_2X + a_3Y}{a_1X - a_4Y} = \frac{(a_2^2+a_3^2)XY + a_2a_3(X^2+Y^2)}{(a_1X - a_4Y)^2}.$$

Taking into account (15) and (14), we conclude that

$$(18)\qquad \operatorname{sgn}\,(\operatorname{tan}\psi\,\operatorname{tan}\varphi) = \operatorname{sgn}\,(\alpha_3^2\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_4^2} - \alpha_4^2\sqrt{\alpha_2^2+\alpha_3^2}).$$

We recall that a special polynion (11) represents symbolically a purely amplitude modulated signal like (2), while an ordinary one represents the signal (3), which is amplitude and phase modulated [1].

2. Steady-state Response of Second Order Systems to a Simple Harmonic Amplitude Modulated Input

2.1. If $\widehat{X}_{(i)}$ is the $\mathcal{P}$ - polynion attached to the modulated input (2) (or (3)) applied to a linear constant-coefficients system, and $\widehat{X}_{(o)}$ — the polynion attached to the respective steady-state output, then

$$(19)\qquad \widehat{X}_{(o)} = \widehat{W}(\widehat{d})\,\widehat{X}_{(i)}.$$

Here $\widehat{W}(\widehat{d})$ is the system transferance [4], resulting by replacing in the transfer function the usual complex variable by the derivation operator (5). For a second order system (1) it becomes

$$\widehat{W}(\widehat{d}) = \frac{1}{T^2\widehat{d}^2 + 2zT\widehat{d} + \widehat{d}^\circ}\left(= \frac{1}{\widehat{K}}\right), \tag{20}$$

where $\widehat{d}^\circ = 1$.

The components of the denominator $\widehat{K}$ results immediately

$$\begin{cases} k_1 = T^2(\delta^2 - \omega^2 - p^2) + 2zT\delta + 1, & k_2 = 2Tp(T\delta + z), \\ k_4 = 2T^2\omega p, & k_3 = 2T\omega(T\delta + z). \end{cases} \tag{21}$$

Condition (11) that $\widehat{K}$ (and obviously $\widehat{W}$) be a special $\mathcal{P}$ - polynion gives

$$T^2(\omega^2 + p^2) = 1 - z^2 - (T\delta + z)^2. \tag{22}$$

From $1 - z^2 - (T\delta + z)^2 > 0$ results that this can take place only at second order systems having

$$z < 1. \tag{23}$$

Clearly, the decay factor is restricted to

$$-z - \sqrt{1 - z^2} < T\delta < -z + \sqrt{1 - z^2}. \tag{24}$$

Element $\widehat{K}$ is divisor of zero (13) if

$$T\delta = -z, \qquad \omega \pm p = \frac{1}{T}\sqrt{1 - z^2}, \tag{25}$$

that implies also (23). Let us notice that

$$\Omega = \frac{1}{T} \tag{26}$$

represents the proper angular frequency of system (1), in the absence of damping.

We conclude that in general an input of type (2) applied to a second order system leads to a distorsionated steady-state output like (3) (since the product of a special $\mathcal{P}$ - polynion, attached to (2), with an arbitrary $\mathcal{P}$ - polynion (20), results also in an arbitrary one).

If condition (22) takes place, then the steady-state response produced by (2) is also only amplitude modulated.

According to (14) let calculate from (21)

$$(27)\qquad \begin{cases} \varkappa_1 = k_1 + k_4 = 1 + 2zT\delta + T^2\delta^2 - T^2(\omega - p)^2, \\ \varkappa_2 = k_1 - k_4 = 1 + 2zT\delta + T^2\delta^2 - T^2(\omega + p)^2, \\ \varkappa_3 = k_3 + k_2 = 2T(T\delta + z)(\omega + p), \\ \varkappa_4 = k_3 - k_2 = 2T(T\delta + z)(\omega - p). \end{cases}$$

Then, the exponential form (7) of the transferance (20) becomes

$$(28)\qquad \widehat{W} = (W_1 + W_2 \mathrm{ij}) e^{-i\Psi} e^{-j\Phi},$$

where according to (17) and (15_2), (15_3)

$$(29)\qquad \begin{cases} W_1, W_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\varkappa_1^2 + \varkappa_4^2}} \pm \dfrac{1}{\sqrt{\varkappa_2^2 + \varkappa_3^2}}\right), \\ \tan\Psi = \dfrac{\varkappa_1\sqrt{\varkappa_2^2 + \varkappa_3^2} - \varkappa_2\sqrt{\varkappa_1^2 + \varkappa_4^2}}{\varkappa_4\sqrt{\varkappa_2^2 + \varkappa_3^2} + \varkappa_3\sqrt{\varkappa_1^2 + \varkappa_4^2}}, \\ \tan\Phi = \dfrac{\varkappa_4\sqrt{\varkappa_2^2 + \varkappa_3^2} + \varkappa_3\sqrt{\varkappa_1^2 + \varkappa_4^2}}{\varkappa_1\sqrt{\varkappa_2^2 + \varkappa_3^2} + \varkappa_2\sqrt{\varkappa_1^2 + \varkappa_4^2}}. \end{cases}$$

The relative sign of the phase angles is given by (18), being

$$(30)\qquad \operatorname{sgn}(\tan\Psi \tan\Phi) = \operatorname{sgn}(\varkappa_3^2\sqrt{\varkappa_1^2 + \varkappa_4^2} - \varkappa_4^2\sqrt{\varkappa_2^2 + \varkappa_3^2}).$$

Element (19) is now completely determined

$$(31)\qquad \widehat{X}_{(o)} = (W_1 + W_2 \mathrm{ij}) X e^{i(\psi - \Psi)} e^{j(\varphi - \Phi)}.$$

The correspondence between (7) and (3) gives the dependence on the time of the steady-state output

$$(32)\qquad \begin{aligned} x_{(o)}(t) = [&W_1 X \sin(pt + \psi - \Psi)\sin(\omega t + \varphi - \Phi) + \\ &+ W_2 X \cos(pt + \psi - \Psi)\cos(\omega t + \varphi - \Phi)]\, e^{\delta t}. \end{aligned}$$

The term having W_1X as amplitude is called „main component" of the response, and the other term — „distorsion component".

Let denote

$$(33)\qquad \begin{cases} W_1 X e^{\delta t}\sin(pt + \psi - \Psi) = \mathcal{A}(t)\cos\Theta(t), \\ W_2 X e^{\delta t}\cos(pt + \psi - \Psi) = \mathcal{A}(t)\sin\Theta(t); \end{cases}$$

then the motion (32) becomes

$$(34)\qquad x_{(o)}(t) = \mathcal{A}(t)\sin[\omega t + \varphi - \Phi + \Theta(t)].$$

It represents an amplitude and phase modulated oscillation, where

$$(35)\qquad \begin{cases} \mathcal{A}(t) = X\,e^{\delta t}\sqrt{W_1^2\sin^2(pt+\psi-\Psi)+W_2^2\cos^2(pt+\psi-\Psi)}, \\ \tan\Theta(t) = \dfrac{W_2}{W_1}\operatorname{cotan}(pt+\psi-\Psi). \end{cases}$$

2.2. Particular cases. a) Let be the signal

$$(36)\qquad x_{(i)}(t) = X\sin(pt+\psi)\sin(\omega t+\varphi),$$

important in alternating feedback control systems. It corresponds to $\delta = 0$.

The output (32) is given also by (32), (29), where $\delta = 0$ and

$$(37)\qquad \begin{cases} \varkappa_1 = 1 - T^2(\omega-p)^2, & \varkappa_2 = 1 - T^2(\omega+p)^2, \\ \varkappa_3 = 2zT(\omega+p), & \varkappa_4 = 2zT(\omega-p). \end{cases}$$

b) The nondistorsionated steady-state output takes place if condition (22) holds. Then the components (21) become

$$(38)\qquad \begin{cases} k_1 = 2(T\delta+z)^2, & k_2 = 2Tp(T\delta+z), \\ k_4 = 2T^2\omega p, & k_3 = 2T\omega(T\delta+z) \end{cases}$$

and the transferance (28) is a special $\mathcal{P}$ - polynion, namely

$$(39)\qquad \widehat{W} = We^{-i\Psi}e^{-j\Phi}.$$

According to (12), (38) and (22) we get

$$(40)\qquad \begin{cases} W = \dfrac{1}{2\sqrt{(1-z^2)(T\delta+z)^2+T^4\omega^2p^2}}, \\ \tan\Psi = \dfrac{Tp}{T\delta+z}, \quad \tan\Phi = \dfrac{T\omega}{T\delta+z}. \end{cases}$$

The nondistorsionated output signal is

$$(41)\qquad x_{(o)}(t) = WXe^{\delta t}\sin(pt+\psi-\Psi)\sin(\omega t+\varphi-\Phi).$$

c) If the constants T and δ satisfy the particular relation

$$(42)\qquad T\delta + z = 0,$$

the components (21) are

$$43)\qquad k_1 = 1 - 2z^2 - T^2(\omega^2+p^2), \quad k_2 = k_3 = 0, \quad k_4 = 2T^2\omega p.$$

The transferance (20) is now

$$W(d) = \frac{1}{k_1 + k_4 \mathrm{ij}} = W_1 + W_2 \mathrm{ij} \left(= \frac{k_1 - k_4 \mathrm{ij}}{k_1^2 - k_4^2} \right) \tag{44}$$

and then

$$\begin{aligned} x_{(o)}(t) = [W_1 X \sin(pt + \psi) \sin(\omega t + \varphi) + \\ + W_2 X \cos(pt + \psi) \cos(\omega t + \varphi)] \, \mathrm{e}^{-\frac{z}{T} t}. \end{aligned} \tag{45}$$

d) If (25) takes place, the transferance denominator id divisor of zero in the $\mathcal{P}$-polynions algebra. That means resonance, with infinite values of the response [4].

3. The Frequency Response

We introduce now the reduced parameters

$$\lambda = T\delta, \quad m = Tp, \quad u = T\omega, \tag{46}$$

called [1] reduced atenuation, reduced modulation frequency and reduced frequency. Taking into account (26), we see that they are now

$$\lambda = \frac{\delta}{\Omega}, \quad m = \frac{p}{\Omega}, \quad u = \frac{\omega}{\Omega}, \tag{47}$$

with Ω the proper angular frequency (26) of the undamped second order system (1).

Let introduce the dimensionless quantities $\chi_1 = \varkappa_1/\Omega, \ldots, \chi_4 = \varkappa_4/\Omega$. Then

$$\begin{cases} \chi_1 = 1 + 2z\lambda + \lambda^2 - (u - m)^2, & \chi_3 = 2(\lambda + z)(u + m), \\ \chi_2 = 1 + 2z\lambda + \lambda^2 - (u + m)^2, & \chi_4 = 2(\lambda + z)(u - m) \end{cases} \tag{48}$$

and we obtain (see (29)) the following expressions for the two ratios of output amplitude to input amplitude (W_1, W_2) and the phase angles

$$\begin{cases} W_1, W_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\chi_1^2 + \chi_4^2}} \pm \dfrac{1}{\sqrt{\chi_2^2 + \chi_3^2}} \right), \\ \tan \Psi = \dfrac{\chi_1 \sqrt{\chi_2^2 + \chi_3^2} - \chi_2 \sqrt{\chi_1^2 + \chi_4^2}}{\chi_4 \sqrt{\chi_2^2 + \chi_3^2} + \chi_3 \sqrt{\chi_1^2 + \chi_4^2}}, \\ \tan \Phi = \dfrac{\chi_1 \sqrt{\chi_2^2 + \chi_3^2} + \chi_3 \sqrt{\chi_1^2 + \chi_4^2}}{\chi_1 \sqrt{\chi_2^2 + \chi_3^2} + \chi_2 \sqrt{\chi_1^2 + \chi_4^2}}. \end{cases} \tag{49}$$

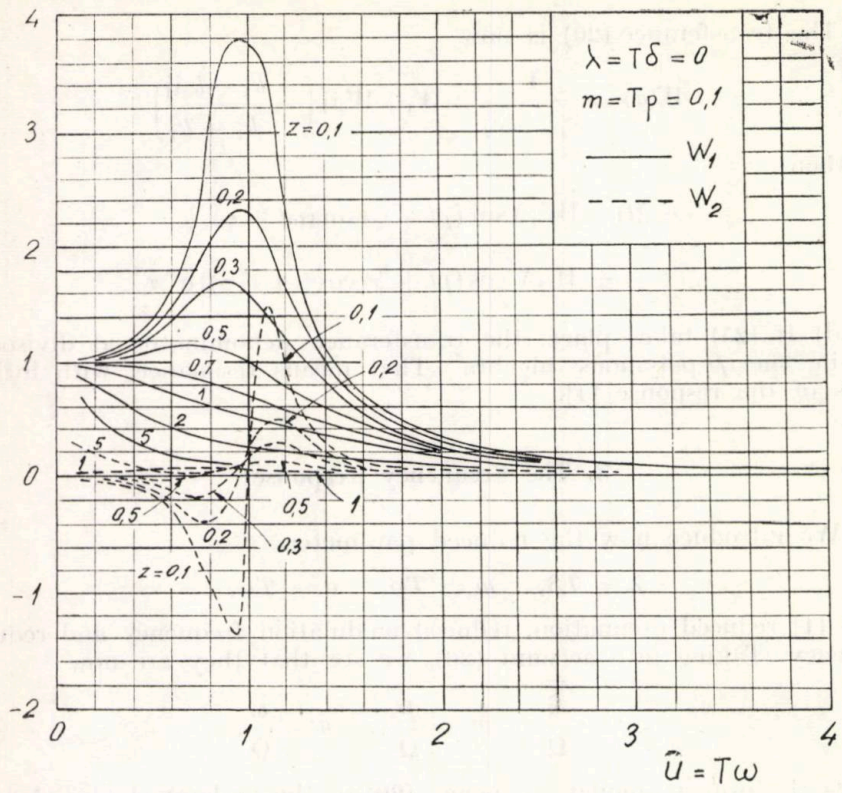

λ = Tδ = 0
m = Tp = 0,1
W1
W2
z = 0,1
0,2
0,3
0,1
0,5
0,7
1
2
5
0,2
0,5
1
0,3
z = 0,1
4
3
2
1
0
-1
-2
0
1
2
3
4
ũ = Tω

Fig. 1

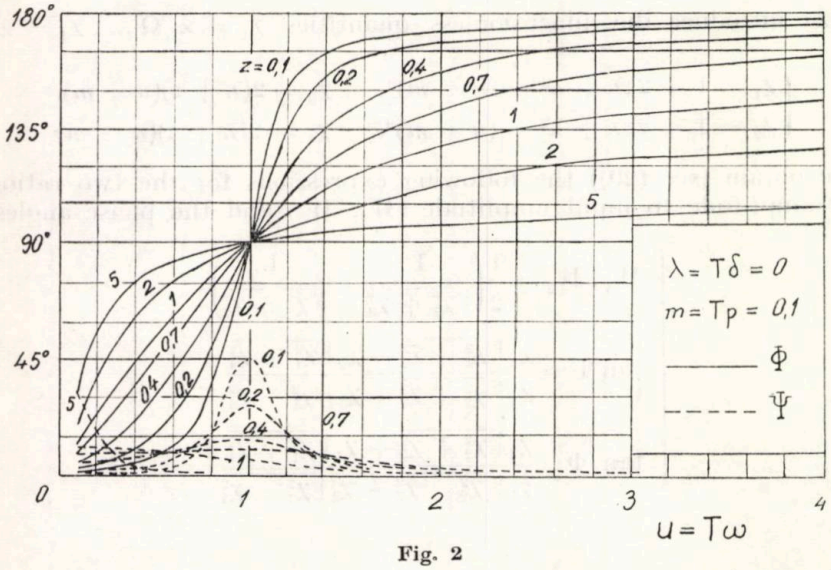

180°
135°
90°
45°
0
z = 0,1
0,2
0,4
0,7
1
2
5
λ = Tδ = 0
m = Tp = 0,1
Φ
Ψ
1
2
3
4
u = Tω

Fig. 2

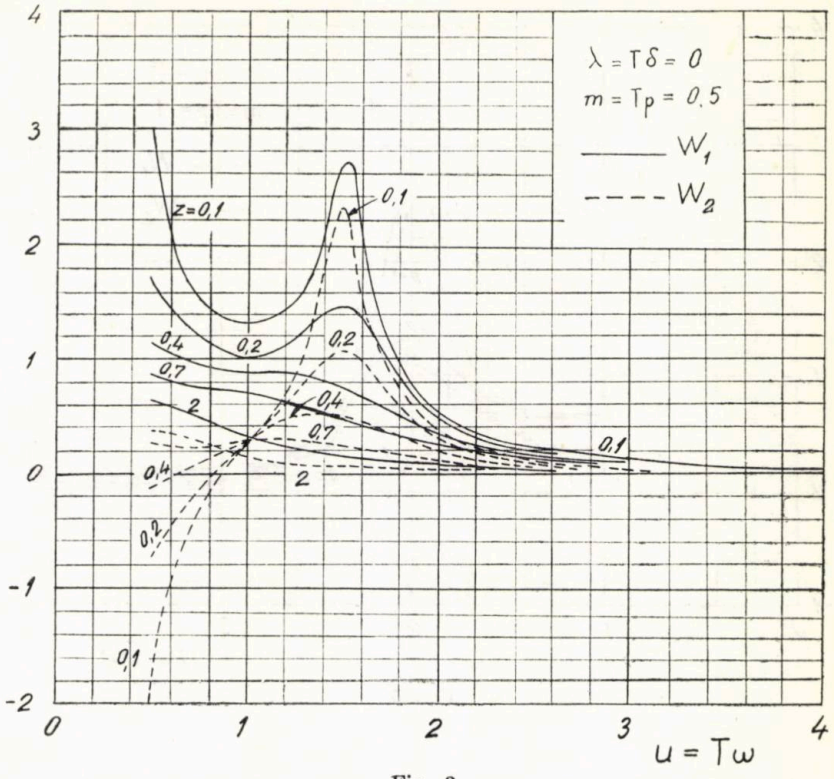

λ = Tδ = 0
m = Tp = 0,5
W1
W2
z=0,1
0,1
0,2
0,4
0,7
1
2
5
u = Tω

Fig. 3

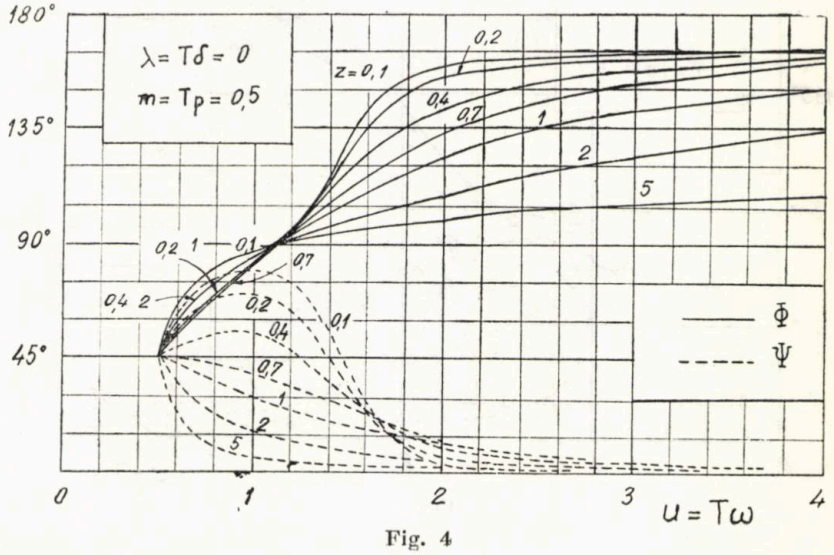

λ = Tδ = 0
m = Tp = 0,5
z=0,1
0,2
0,4
0,7
1
2
5
Φ
Ψ
180°
135°
90°
45°
u = Tω

Fig. 4

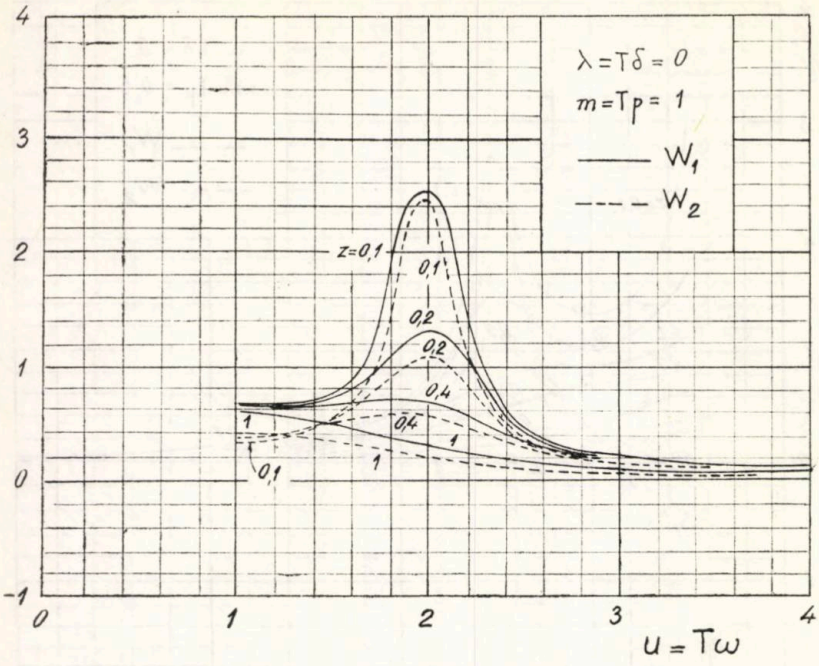

λ = Tδ = 0
m = Tp = 1
W1
W2
z=0,1
0,1
0,2
0,2
0,4
0,4
1
1
1
0,1
4
3
2
1
0
-1
0
1
2
3
4
u = Tω

Fig. 5

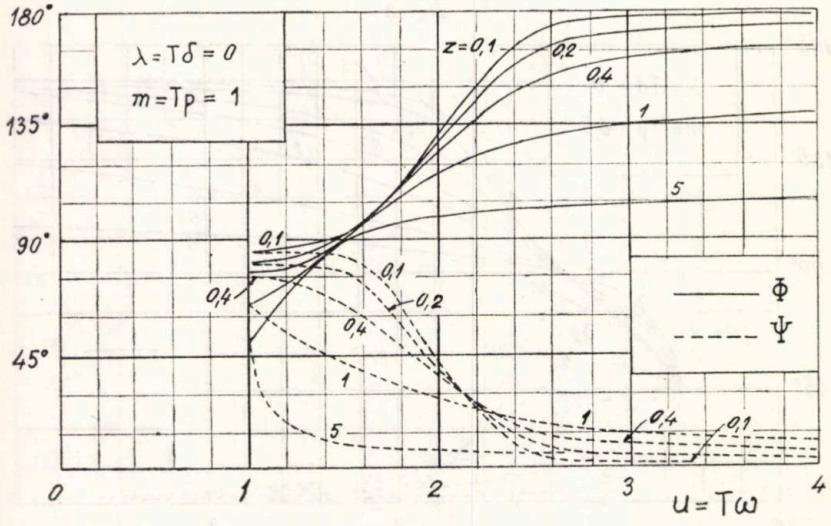

λ = Tδ = 0
m = Tp = 1
z=0,1
0,2
0,4
1
5
0,1
0,1
0,4
0,2
0,4
1
5
1
0,4
0,1
Φ
Ψ
180°
135°
90°
45°
0
1
2
3
4
u = Tω

Fig. 6

The plot of W_1, W_2, Ψ and Φ vs. u, for a given λ and different fixed values of m and z, lead to new amplitude and phase response curves for a second order system. They offer all the needed informations regarding the system response to input (2).

We give in Figs. 1...6 some amplitude and phase response curves, namely for the important input signal (36).

It is to be noticed that the amplitude ratio of the output distorsion component is always smaller than that of the main component and becomes more rapidly negligible.

4. Conclusion

1. The steady-state response of a second order system (1) to an input (2) is for the first time studyied in an unitary manner, using suitable hypercomplex numbers (4).

2. Generally, the steady-state response (32) produced by a purely harmonic amplitude modulated signal (2) results amplitude and phase modulated (distorsionated (34)). All the quantities involved are expressed by (29), (27).

Only if (22) takes place, the response is also purely amplitude modulated. Resonance with infinite values occurs for (25).

3. New frequency response curves for a second order system, are presented in Figs. 1...6. They are characteristic for the behaviour of such a system under a simple harmonic amplitude modulated input, of type (1).

Received November 2, 1972

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Theoretical Mechanics

REFERENCES

1. Braier A., *Frequency Response of First Order Systems to Amplitude Modulated Inputs.* (I) *Simple Harmonic Modulated Inputs.* Bul. Inst. polit. Iași, XVI (XX), *3—4*, s. IV, 7—14 (1970).
2. Braier A., *Frequency Response of First Order Systems to Amplitude Modulated Inputs.* (II) *Linear Modulated Inputs.* Bul. Inst. polit. Iași, XVII (XXII), *1—2*, s. IV, 13—18 (1971).
3. Braier A., *Frequency Response of First Order Systems to Amplitude Modulated Inputs.* (III) *General Harmonic Modulated Inputs.* Bul. Inst. polit. Iași, XVII (XXI), *3—4*, s. IV, 19—28 (1971).
4. Braier A., *The Transferance of a System.* Bul. Inst. polit. Iași, XV (XIX), *3—4*, s. I, 59—68 (1969).
5. Braier A., *Response of Building Structures to some Sismic Actions.* Wiss. Z. der Hochschule für Arhit. u. Bauwesen Weimar, XIX, *2*, 134—141 (1972).
6. Braier A., *New Algebraic Method in Dynamic Systems.* Int. Centre for Mech. Sci., Udine, 1972, 126 p.
7. Gille J. C., Decaulne P., Pelegrin M., *Théorie et calcul des asservissements.* Dunod, Paris, 1963.

RĂSPUNSUL FRECVENŢIAL AL SISTEMELOR DE ORDINUL DOI LA INTRĂRI MODULATE ÎN AMPLITUDINE

I. Intrări cu modulaţie armonică simplă

(Rezumat)

Utilizînd reprezentarea prin numere hipercomplexe (1) a semnalului modulat în amplitudine (2), se studiază trecerea sa printr-un sistem de ordinul doi, stabilind că în general, răspunsul de regim permanent pe care îl produce este modulat atît în amplitudine cît şi în fază (răspuns distorsionat). Toate mărimile necesare pentru caracterizarea completă a răspunsului (32) sînt date de (29) şi (27). Răspunsul nu prezintă distorsiuni de fază dacă are loc (27); se obţine rezonanţă cu valori infinite ale răspunsului pentru (25).

În fig. 1...6 s-au construit noile caracteristici de frecvenţă corespunzătoare funcţionării în regim permanent a unui sistem de ordinul doi, cînd la intrarea sa este aplicat un semnal cu modulaţie armonică simplă (1).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. C. 539.388

EFFECTS OF INHOMOGENEITIES ON THE ELASTIC-PLASTIC BOUNDARY [1])

BY

E. M. SHOEMAKER

1. Introduction

Experiments to measure the elastic-plastic boundary (or flow regions) in torsion and bending, for example, have been notably unsuccessful in that very irregular boundaries are produced which bear little relationship to theoretically calculated boundaries. N a d a i [1] was perhaps the first to suggest that the explanation for this discrepancy must lie in material inhomogeneities [2]). He appealed to the roof-membrane analogy in torsion but his analysis is little more than a suggestion of an approach to the problem. Since that time apparently no theoretical analysis of the discrepancy has been made.

The effect of an inhomogeneous yield limit on the shape of the elastic-plastic boundary in torsion of a circular cylinder is investigated for an elastic-perfectly plastic material. Three examples are considered. The first example shows that a radially dependent yield limit does not change the qualitative character of the elastic-plastic boundary. The last two examples illustrate that arbitrarily small changes in angular dependence of the yield limit (or angular and radial dependence combined) can produce large qualitative changes in the shape of the boundary which agree strikingly with N a d a i's results.

In the last two examples it is necessary to appeal to the roof-membrane analogy [2]. While the analogy may be valid for these examples, in general it is not valid for an inhomogeneous material. The results of H o d g e [3] are re-examined for this more general situation.

---

[1]) This work was supported by the National Research Council of Canada.

[2]) He also suggests that the explanation might lie in the boundary of the region being not smooth but corrugated. This effect is not investigated here, but is an interesting and consistent explanation.

2. Radially Dependent Yield Limit

To evaluate the effect of a radially dependent yield limit it is sufficient to examine one simple problem. Consider the special situation of a jump discontinuity in $k(r)$

$$k(r) = \begin{cases} K & a < r \leqslant b \\ k, & 0 \leqslant r < a \end{cases} \quad \text{with} \quad k < K. \tag{1}$$

It is assumed that $\theta(t)$, the angle of twist per unit length, is a strictly increasing function of time t with $\theta(0) = 0$.

For the initial phase of loading the response is entirely elastic. In terms of the usual stress function φ the solution is

$$\varphi = \frac{1}{2} G\theta(b^2 - r^2) . \tag{2}$$

Depending upon conditions (1) initial yield will occur either at $r = a$ or $r = b$. Regardless of which occurs, at some later stage of loading there must exist two plastic regions, one emanating from $r=b$ and the other from $r = a$.

To see this, first suppose that initial yield occurs at $r = b$. Then since φ is of class c^2 in the elastic region and $|\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}r|$ is a monotone increasing function of θ, it is clear that at $r= a$ at some later time $|\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}r| = k$ whereas in some positive neighborhood of $r = a$ the inequality $|\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}r| < K$ holds. Apparently a plastic zone will be initiated at $r = a$ and spread to the negative side of $r = a$.

Second, suppose that initial yield occurs at $r = a$. Then in the domain $a < r < b$ we have essentially an elastic problem for a hollow cylinder where at some later time plastic action will occur at $r = b$. Furthermore, the plastic region initiated at $r = a$ will not spread to $r = 0$ for θ finite; this will be verified.

Subsequent to the time when two plastic regions develop the general solution is

$$\varphi_1 = -\frac{1}{2} G\theta r^2 + c(\theta), \qquad 0 \leqslant r \leqslant \delta(\theta) ; \tag{3}$$

$$\varphi_2 = -kr + d(\theta), \qquad \delta(\theta) \leqslant r \leqslant a ; \tag{4}$$

$$\varphi_3 = -\frac{1}{2} G\theta r^2 + f(\theta), \qquad a \leqslant r \leqslant \rho(\theta) ; \tag{5}$$

$$\varphi_4 = K(b - r), \qquad \rho(\theta) \leqslant r \leqslant b \tag{6}$$

for the inner elastic, inner plastic, outer elastic and outer plastic regions, respectively. Here (6) satisfies the condition $\varphi(b) = 0$; $\delta(\theta)$ and $\rho(\theta)$ are the coordinates of the two elastic-plastic boundaries.

The functions c, d, f, δ and ρ are uniquely determined by the following boundary conditions :

$$(7) \qquad \varphi_1(\delta(\theta)) = \varphi_2(\delta(\theta)) \quad \text{or} \quad -\frac{1}{2} G\theta\delta^2(\theta) + c(\theta) = -k\delta(\theta) + d(\theta);$$

$$(8) \qquad \frac{d\varphi_1(\delta(\theta))}{dr} = \frac{d\varphi_2(\delta(\theta))}{dr} \quad \text{or} \quad G\theta\delta(\theta) = k;$$

$$(9) \qquad \varphi_2(a) = \varphi_3(a) \quad \text{or} \quad -ka + d(\theta) = -\frac{1}{2} G\theta a^2 + f(\theta);$$

$$(10) \qquad \varphi_3(\rho(\theta)) = \varphi_4(\rho(\theta)) \quad \text{or} \quad -\frac{1}{2} G\theta\rho^2(\theta) + f(\theta) = K(b - \rho(\theta));$$

$$(11) \qquad \frac{d\varphi_3(\rho(\theta))}{dr} = \frac{d\varphi_4(\rho(\theta))}{dr} \quad \text{or} \quad G\theta\rho(\theta) = K.$$

We shall later determine the domain of the solution.

We are interested primarily in $\delta(\theta)$ and $\rho(\theta)$. From (8) and (11), respectively

$$(12) \qquad \delta(\theta) = \frac{k}{G\theta}, \qquad (13) \qquad \rho(\theta) = \frac{K}{G\theta}.$$

Eq. (12) is identical to the result which would be obtained if a cylinder of radius $r = a$ were considered independently [2].

The solution holds throughout the domain $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ where

$$(14) \qquad \theta_2 = \frac{K}{Ga}$$

follows from (13) and corresponds to the outer plastic region having spread throughout $a \leqslant r \leqslant b$. Subsequent to $\theta = \theta_2$ there is only one plastic region ; Eq. (12) will still apply and the well known result of an elastic remnant in a neighborhood of $r = 0$ for θ finite still applies.

The solution is first valid for $\theta_1 = \max(\theta', \theta'')$ where

$$(15) \qquad \theta' = \frac{K}{Gb}$$

corresponds to the initiation of the second plastic region at $r = b$ from (13) and

$$(16) \qquad \theta'' = \frac{k}{Ga}$$

corresponds to the initiation of the second plastic region at $r = a$ from (12).

A jump discontinuity is not necessary to the argument. One can always find a smooth transition between k and K in the interval $a \leqslant r \leqslant \rho(\theta)$ such that the stress always lies below yield in the interval. Thus the solution (more importantly its qualitative nature) is also the solution to a problem with $k(r)$ a rapidly changing but smooth function. In the actual physical case rapid changes in $k(x, y)$ could occur due to the effects of grains.

For the practical case where $k \simeq K$, once an elastic annulus is created it is soon eliminated. That is, as $k \to K$, $\theta_2 - \theta_1 \to 0$. Moreover, as $k \to K$ the elastic annulus becomes arbitrarily narrow.

For the general case of an arbitrary number of jump discontinuities [3]) (or of rapid transitions) in $k(r)$ there may exist an arbitrary number of elastic annuli for any value θ. However as the maximum difference in yield limit approaches zero the annuli will become infinitely narrow and will be infinitely close to the nominal elastic-plastic boundary.

While this example does exhibit a qualitative distinction with the classical result of a single circular elastic-plastic boundary it is apparent that radial dependent material properties do not explain N a d a i's experimental results. The following examples examine angular dependent properties with more striking results.

Note that the roof-membrane analogy fails for this first example. The roof function would be defined by

$$\psi = \begin{cases} K(b - r), & a \leqslant r \leqslant b\,; \\ k(a - r) + K(b - a), & 0 \leqslant r \leqslant a. \end{cases} \tag{17}$$

This roof has a convex ridge at $r = a$ and it is easy to show that the membrane would never contact the roof at $r = a$ for θ finite. The analogy would fail to establish the inner plastic zone emanating from $r = a$; instead it would establish an inner plastic zone lying strictly inside $r = a$. The analogy fails because Theorem 2 (Appendix) does not apply to the entire cylinder. (Note that Theorem 2 establishes that an interior plastic region cannot develop in torsion of a simply connected homogeneous cylinder).

3. Angular Dependent Yield Limit

More interesting results are obtained by considering angular dependent properties. Assume the yield limit constant and equal to K everywhere except along two orthogonal diameters where it is a constant $k < K$. The roof function ψ is shown in Fig. 1 *a*. The cone with $|\nabla\psi| = K$,

[3]) Note that the case of a jump discontinuity in $k(r)$ of opposite sign to that considered here does not result in an elastic annulus.

which is the roof function for the classical case holds throughout ABC. On AO the gradient by symmetry, is the derivative in the direction AO and $|\nabla\psi| = k$. AO determines a plane on which $|\nabla\psi| = K$ which intersects the cone in the arc AC of a parabola and intersects a similar plane determined by OE in the line CO. Thus, three different domains of influence intersect along ridge AC and ridge CO. The two planes intersecting in AO form a notch or concave ridge as defined in the Appendix.

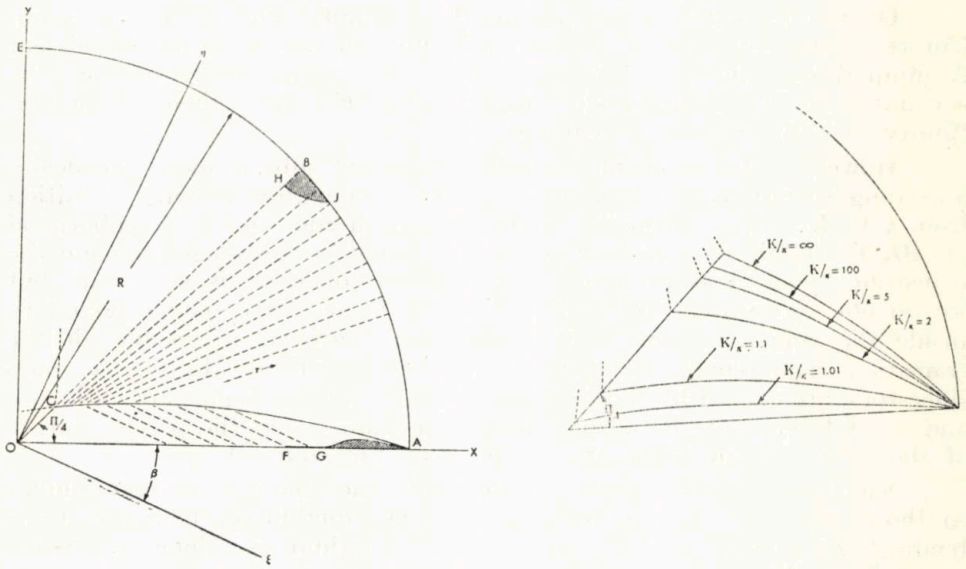


Fig. 1. — a — Domains of influence of roof function ψ for one octant of circular region. Cone ABO, $\psi = K(R - r)$, intersects plane through AO, $\psi = k(R - x) + (K^2 - k^2)^{1/2} y$, in arc of parabola AC, $\eta^2 = 2R(K - k)\xi/K + [(K - k)/K]^2R^2$. Coordinate rotation and characteristic directions, $\tan\beta = (K^2 - k^2)^{1/2}/2K$. Parabola vertex, $\xi = -R(K - k)/2K$. Case illustrated is for $K/k = 1.1$; b — Influence regions for various rations of K/k.

We do not attempt a solution to this very complicated elastic-plastic problem but instead appeal to the roof-membrane analogy. The qualitative character of the elastic-plastic boundary is all that interests us. We shall first assume the analogy and later attempt to verify it.

Clearly, initial membrane contact will occur at point A and will spread along AO in line contact. Eventually, surface contact with plane ACO will take place. At a general stage of loading we will have line contact along FG and surface contact on GA. This „plastic zone" can never reach the ridges CO and AC for finite twist θ. At some time after con-

tact begins at A a zone of contact will spread in from point B. This zone will never reach the ridge AC for finite 0.

Theorem 2 guarantees in the domain defined by $\varphi < \psi$ (where there is no roof-membrane contact) that $|\nabla\psi| < K$. The only place where yield might occur would be on the notch OF. But from symmetry $\partial\varphi/\partial y = 0$ there and we expect also that $|\partial\varphi/\partial x|$ is monotone increasing with x [4]). Assuming this last property holds the analogy problem solution and torsion solution are therefore identical.

On FA the stress τ_{xz} has a jump discontinuity. This presents no problem regarding equilibrium but compatibility is not as easily dismissed. A jump discontinuity in the warping function is required which can be accounted for by infinite plastic shear strain on FA. Nevertheless, a discontinuity in displacement is required.

However, the problem is easily converted into a more physically appealing situation by assuming a uniform smoothly varying transition from k to K in an arbitrarily narrow transition zone in the neighborhood of AO. The qualitative picture of Fig. 1 *a* would be unchanged outside the transition zone. It is probably true that the analogy is still valid but we do not necessarily care. If it is not, then the elastic-plastic boundary inside the transition zone will be affected. However, ridges outside the transition zone remain as „barriers" to the growth of the plastic zones since they are caused by the intersection of the various regions of influence and the influence of AO is qualitatively unchanged by the precise nature of the elastic-plastic boundary in the transition zones [5]).

Such plastic zones as are predicted by the analogy are very similar to those encountered experimentally [1]. The qualitative features of extending the present analysis to n such discontinuities along diameters are obvious. The example, in fact, demonstrates that a local change in yield limit can cause global changes in the influence domains and through this effect large changes in the shape of the elastic-plastic boundary. This may be more easily seen in the final example.

4. Angular and Radial Dependent Yield Limit

This example combines the previous examples though the results agree qualitatively with the second example. Moreover, the example is physically appealing in that it represents the effect of localized material irregularities.

---

[4]) Alternatively, one could assume strength K on segment OF in which case at this value of 0, Theorem 2 and the analogy are certainly valid for this particular distribution of $k(r)$ along OA at this particular time.

[5]) Alternatively, a similar argument to footnote 4 may be used.

Consider the previous example where now $k = K$ everywhere except on the four line segments $a < r < A$ of the two orthogonal diameters. We have in mind making the segment aA small in order to suggest a local irregularity in material structure. The roof function, Fig. 2, consists of the cone ABC and plane AaC^1 as in the second example. However, a second cone, vertex at a, on which $|\nabla\psi| = K$ intersects the plane in a smooth transition on aC^1 and intersects a similar cone reflected about OB in the ridge arc OC. Thus the notch of the second example is reduced to line aA.

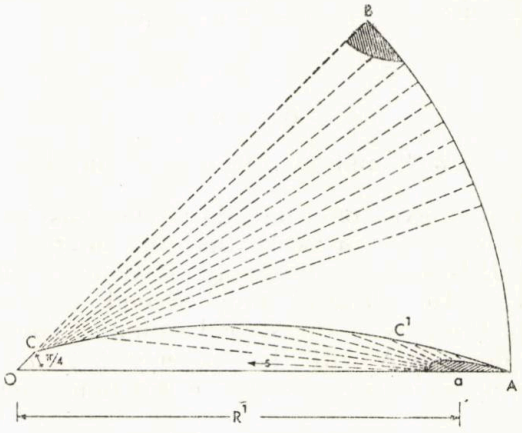


Fig. 2. — Domains of influence for discontinuity in yield limit along line segment aA. Cone vertex at a, $\psi = Ks + k(R - R^1)$ intersects cone OAB and plane AaC^1 of Fig. 1 a in arcs CC^1 and C^1A, respectively. When plastic zone includes aA roof-membrane analogy applies. Case illustrated is for $K/k = 1.1$, and $R^1/R = 0.9$.

The qualitative picture of the second example remains. Plastic regions form at A and B and are prevented from joining by the ridges. Once the plastic region at A includes the segment aA the roof-membrane analogy applies from that stage of loading since all the metarial outside the plastic zone has strength K and Theorem 2 applies.

If one could imagine n such segments spaced regularly on a circumference we would obtain the triangular plastic zones of N a d a i's experiments. We conclude that his results can be interpreted as the effect of local small irregularities in the yield limit. Realizing that N a d a i used strain hardening materials and his experiments really measure zones of plastic flow rather than the elastic-plastic boundary we feel that both effects can still be attributed to the same phenomenon.

5. Appendix

Roff-Membrane Analogy

We examine the roof-membrane analogy for a simply connected domain A bounded by curve C for a variable yield limit $k(x, y)$. In general, the analogy is invalid. (H o d g e [3] has established its validity for the classical case $k = \text{const.}$) However, in special cases the analogy may apply so that it is important to understand where it may break down.

The roof function, whose construction is discussed in detail for the case $k = \text{const.}$ by T i n g [4], has the properties

$$|\nabla\psi| = k \quad \text{in} \quad A, \tag{18 a}$$

$$\psi = 0 \quad \text{on} \quad C, \tag{18 b}$$

$$\psi \in C^0 \text{ and is piecewise } C^2 \text{ in } A. \tag{18 c}$$

First derivatives fail to exist only on ridges. One class of ridges is convex ridges, denoted R, with the property that the jump in the normal derivative of ψ across R is negative, $[\partial\psi/\partial n]_R < 0$. Convex ridges are the only type encountered in the classical case. Second, if jump discontinuities in k are permitted then, as in the second example, concave ridges, called notches here and denoted N with the property $[\partial\psi/\partial n]_N > 0$, may occur.

The analogy problem is to determine function φ on A such that

$$\theta(t) \in C^2, \quad \dot{\theta} > 0, \quad \theta(0) = 0\,; \tag{19 a}$$

$$\text{If } \varphi < \psi \text{ then } \nabla^2\varphi = -2G\theta\,; \tag{19 b}$$

$$\text{If } \varphi = \psi \text{ then } \dot{\varphi} = 0 \text{ for all subsequent time}\,; \tag{19 c}$$

$$\varphi \in C^0 \text{ and piecewise } C^2 \text{ in } A\,; \tag{19 d}$$

$$\varphi = 0 \text{ on } C. \tag{19 e}$$

On ridges R, $\varphi < \psi$ for θ finite. In other words the membrane does not contact a convex ridge under a finite pressure. However the membrane may contact a notch. This is a qualitative distinction with the classical theory.

In order for the analogy problem solution to constitute a solution to the torsion problem it is necessary to show two things: first that (19c) is satisfied so that once the membrane contacts the roof it remains in contact. Second, it must be established in the subdomain of A defined by $\varphi < \psi$ that $|\nabla\varphi| < k$. It turns out that the first requirement is satisfied but the second is not.

H o d g e [3] established the validity of the analogy for simply connected regions and constant k. We have only to deal with the presence of notches N as well as k non constant.

Theorem 1. $\dot{\varphi} \geqslant 0$ *in* A.

Proof. Consider two arbitrary times $t' < t''$ and let $\delta\varphi = \varphi' - \varphi''$. We wish to show that $\delta\varphi \leqslant 0$ in A.

Assume the theorem false. Since $\delta\varphi = 0$ on C there exists at least one point M in A where $\delta\varphi$ has a relative maximum. Hodge's proof carries over for variable k to the extent that M cannot be in the domain $A - N$. We have only to show that M does not lie on N.

Assume M lies on N. Examine φ' in a plane normal to N through M. Then $[\partial\varphi'/\partial n]_M > 0$ by the definition of a notch. On the other hand $\varphi'' \in C^2$ in a neighborhood of M since at $t = t''$ M is an interior point of the elastic region. It follows that $[\partial\delta n/\partial\varphi]_M > 0$, i. e. since there is no jump in φ'' the jump in φ' is transferred to $\delta\varphi$. There must then exist neighboring points to M where $\delta\varphi$ exceeds $\delta\varphi_M$ and M cannot be a point of relative maximum. If no normal to N exists at M one can always choose another direction r such that $[\partial\varphi'/\partial r]_M > 0$.

Thus it is still true that once the membrane contacts the roof it remains in contact.

Theorem 2. $\nabla\varphi \leqslant k$ *in* A.

The theorem is true in general only if $k = \text{const.}$ (as the first example shows). While it is true in the region $\varphi < \psi$ that $|\nabla\varphi|$ achieves its maximum on the boundary, if weaker material lies within this boundary than lies on the boundary yield can be violated in the presumed elastic region. On the other hand if the material in the domain $\varphi < \psi$ is at least as strong as the material on its boundary the theorem is true and the domain is an elastic domain.

The theorem can also be true in other special circumstances, for example from arguments of symmetry as are invoked in the second example.

Received September 20, 1969

Simon Frazer University,
Burnaby, Canada

REFERENCES

1. Nadai A., *Theory of Flow and Fracture of Solids.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1950.
2. Prager W., Hodge P. G. Jr., *Theory of Perfectly Plastic Solids.* J. Wiley and Sons, New York, 1951.
3. Hodge P. G. Jr., *On the Soap-Film Sand-Hill Analogy for Elastic-Plastic Torsion.* In *Progress in Applied Mechanics,* Macmillan, New York, 1963.
4. Ting T. W., *The Ridge of a Jordan Domain and Completely Plastic Torsion.* J. Math. a. Mech., **15** (1966).

EFECTELE NEOMOGENITĂȚILOR ASUPRA MARGINILOR ELASTO-PLASTICE

(Rezumat)

Se cercetează efectul unei limite de curgere neomogene asupra aspectului marginii elasto-plastice la torsionarea unui cilindru circular drept. Se arată că o limită de curgere cu dependență radială nu schimbă calitativ caracterul frontierei elasto-plastice. Variații arbitrar de mici în dependența de unghi a limitei de curgere pot produce însă modificări calitative importante ale aspectului frontierei, în conformitate cu rezultatele semnalate de N a d a i [1].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 531.31

SUR L'APPLICATION DU PRINCIPE DE GAUSS DANS LA DYNAMIQUE DES SYSTÈMES AYANT DE SOLIDES RIGIDES DE MASSES VARIABLES COMME ÉLÉMÉNTS CONSTITUTIFS

PAR

SPIRIDON DELEANU, N. IRIMICIUC et M. STANCU

0. Introduction

Tout en poursuivant l'idée exposée dans la suite de travaux [1].. ...[5], les auteurs de cette Note établissent une nouvelle expression pour la contrainte du mouvement réel par rapport au mouvement libre d'un système mécanique qui change de particules matérielles avec l'extérieur.

Cette nouvelle expression de la contrainte permettra de formuler le principe de Gauss pour des système mécaniques ayant comme éléments constitutifs les solides de masses variables, dont le modèle a été présenté dans les travaux cités.

1. Établissement de l'expression de la contrainte

On définit *la contrainte du mouvement réel de transport par rapport au mouvement libre* d'un système mécanique ayant de solides de masses variables comme éléments constitutifs, par la relation :

$$C_t = \frac{2}{\mathrm{d}t^4} \sum_{\nu} \left\{ \sum_{(M_{c_\nu})} \mathrm{d}m \, [\bar{r}(t+\mathrm{d}t) - \bar{r}_l(t+\mathrm{d}t)]^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{(M_{a_\nu})} \mathrm{d}m \, [\bar{r}(t+\mathrm{d}t) - \bar{r}_l(t+\mathrm{d}t)]^2 + \sum_{(M_{d_\nu})} \mathrm{d}m \, [\bar{r}(t+\mathrm{d}t) - \bar{r}_l(t+\mathrm{d}t)]^2 \right\}, \tag{1.1}$$

où $\bar{r}(t+\mathrm{d}t)$ et $\bar{r}_l(t+\mathrm{d}t)$ sont les vecteurs de position, à l'instant t, d'un point arbitraire B du solide (S_ν), $(\nu = 1, 2, ..., n)$, par rapport à un pôle fixe, respectivement dans le mouvement réel de transport et dans le mou-

vement libre de transport et M_{c_ν}, M_{a_ν}, M_{d_ν} sont la masse constante du solide (S_ν), la masse qui annexe et la masse qui détache continuellement des particules matérielles.

On peut d'abord écrire l'égalite évidente

$$(1.2)\qquad [\bar{r}(t+\mathrm{d}t)-\bar{r}_l(t+\mathrm{d}t)]^2=[\bar{r}(t+\mathrm{d}t)-\bar{r}_l(t+\mathrm{d}t)]\cdot$$
$$\cdot\{[\bar{r}_{Q_\nu}(t+\mathrm{d}t)+\bar{r}'(t+\mathrm{d}t)]-[\bar{r}_{Q_{\nu_l}}(t+\mathrm{d}t)+\bar{r}'_l(t+\mathrm{d}t)]\},$$

où $\bar{r}_{Q_\nu}$ et $\bar{r}_{Q_{\nu_l}}$ sont les vecteurs de position du pôle Q_ν invariablement lié à la masse constante du solide (S_ν) par rapport au pôle fixe, et $\bar{r}'(t+\mathrm{d}t)$ et $\bar{r}'_l(t+\mathrm{d}t)$ sont les vecteurs de position du point B par rapport au pôle Q_ν dans les deux mouvements considérés (réel et libre).

Il est très facile de poursuivre les développements suivants :

$$(1.3)\qquad \bar{r}_{Q_\nu}(t+\mathrm{d}t)=\bar{r}_{Q_\nu}(t)+\dot{\bar{r}}_{Q_\nu}(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\mathrm{d}t^2\ddot{\bar{r}}_{Q_\nu}(t)+\ldots=$$
$$=\bar{r}_{Q_\nu}(t)+\bar{v}_{Q_\nu}(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\mathrm{d}t^2\bar{a}_{Q_\nu}(t)+\ldots,$$

$$(1.4)\qquad \bar{r}_{Q_{\nu_l}}(t+\mathrm{d}t)=\bar{r}_{Q_{\nu_l}}(t)+\mathrm{d}t\dot{\bar{r}}_{Q_{\nu_l}}(t)+\frac{1}{2}\mathrm{d}t^2\ddot{\bar{r}}_{Q_{\nu_l}}(t)+\ldots=$$
$$=\bar{r}_{Q_{\nu_l}}(t)+\mathrm{d}t\bar{v}_{Q_{\nu_l}}(t)+\frac{1}{2}\mathrm{d}t^2\bar{a}_{Q_{\nu_l}}(t)+\ldots,$$

et ensuite

$$(1.5)\qquad \bar{r}(t+\mathrm{d}t)=\bar{r}(t)+\mathrm{d}t\bar{v}_l(t)+\frac{1}{2}\mathrm{d}t^2\bar{a}_l+\ldots,$$

$$(1.6)\qquad \bar{r}_l(t+\mathrm{d}t)=\bar{r}_l(t)+\mathrm{d}t\bar{v}_{l_l}(t)+\frac{1}{2}\mathrm{d}t^2\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}}{\mathrm{d}m}+\frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}_r}{\mathrm{d}m}+\frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}_{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}m}\right),$$

$$(1.7)\qquad \bar{r}'(t+\mathrm{d}t)=\bar{r}'(t)+\mathrm{d}t\bar{\omega}_\nu\times\bar{r}'(t)+\frac{1}{2}\mathrm{d}t^2[\bar{\varepsilon}_\nu\times\bar{r}'+\bar{\omega}_\nu\times(\bar{\omega}_\nu\times\bar{r}')]+\ldots,$$

$$(1.8)\qquad \bar{r}'_l(t+\mathrm{d}t)=\bar{r}'_l(t)+\mathrm{d}t\bar{\omega}_{\nu_l}\times\bar{r}'_l(t)+\frac{1}{2}\mathrm{d}t^2[\bar{\varepsilon}_{\nu_l}\times\bar{r}'_l+\bar{\omega}_{\nu_l}\times(\bar{\omega}_{\nu_l}\times\bar{r}'_l)]+\ldots,$$

pour les points qui appartiennent à la zone avec la masse constante, et

$$(1.9)\qquad \bar{r}(t+\mathrm{d}t)=[\bar{r}(t)+\mathrm{d}t\bar{v}_l(t)+\frac{1}{2}\mathrm{d}t^2\bar{a}_l+\ldots]+$$
$$+\{\mathrm{d}t\bar{v}_r(t)+\frac{1}{2}\mathrm{d}t^2[\bar{a}_r(t)+\bar{a}_c(t)]+\ldots\},$$

$$\bar{r}_l(t+\mathrm{d}t) = \left[\bar{r}_l(t) + \mathrm{d}t\,\bar{v}_{t_l}(t) + \frac{1}{2}\mathrm{d}t^2\left(\frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}}{\mathrm{d}m} + \frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}_r}{\mathrm{d}m} + \frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}_{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}m}\right) + \ldots\right] + \tag{1.10}$$

$$+ \left\{\mathrm{d}t\,\bar{v}_{r_l}(t) + \frac{1}{2}\mathrm{d}t^2[\bar{a}_{r_l}(t) + \bar{a}_{\bullet_l}(t)] + \ldots\right\},$$

$$\bar{r}'(t+\mathrm{d}t) = \bar{r}'(t) + \mathrm{d}t\,\bar{\omega}_\nu \times \bar{r}'(t) + \frac{1}{2}\mathrm{d}t^2[\bar{\varepsilon}_\nu \times \bar{r}' + \bar{\omega}_\nu \times (\bar{\omega}_\nu \times \bar{r}')] + \tag{1.11}$$

$$+ \mathrm{d}t\,\bar{v}_r + \frac{1}{2}\mathrm{d}t^2[\bar{a}_r(t) + \bar{a}_c(t)] + \ldots,$$

$$\bar{r}'_l(t+\mathrm{d}t) = \bar{r}'_l(t) + \mathrm{d}t\,\bar{\omega}_{\nu_l} \times \bar{r}'_l(t) + \frac{1}{2}\mathrm{d}t^2[\bar{\varepsilon}_{\nu_l} \times \bar{r}'_l + \bar{\omega}_{\nu_l} \times (\bar{\omega}_{\nu_l} \times \bar{r}'_l)] + \tag{1.12}$$

$$+ \mathrm{d}t\,\bar{v}_{r_l} + \frac{1}{2}\mathrm{d}t^2[\bar{a}_{r_l}(t) + \bar{a}_{c_l}(t)] + \ldots$$

pour les points qui appartiennent aux zones avec la masse variable, M_{a_ν} où M_{d_ν}, en mouvements relatifs avec les paramètres cinématiques $\bar{v}_r$ et $\bar{a}_r$, respectivement $\bar{v}_{r_l}$ et $\bar{a}_{r_l}$.

Tout en remarquant qu'à l'instant t les mouvements relatifs ne sont pas influencés par des liaisons, ($\bar{r}'(t) = \bar{r}'_l(t)$, $\bar{v}_r(t) = \bar{v}_{r_l}(t)$, $\bar{a}_r(t) = \bar{a}_{r_l}(t)$ et $\bar{a}_c(t) = \bar{a}_{c_l}(t)$) et que les paramètres de position et les paramètres cinématiques de premier ordre sont, au même instant t, identiques dans les deux mouvements — réel et libre —, ($\bar{r}_{Q_\nu}(t) = \bar{r}_{Q_{\nu_l}}(t)$, $\bar{v}_{Q_\nu}(t) = \bar{v}_{Q_{\nu_l}}(t)$, $\bar{\omega}_\nu(t) = \bar{\omega}_{\nu_l}(t)$), on obtient, en vertu des relations (1.2)...(1.12), l'expression suivante pour la contrainte (1.1):

$$C_l = \frac{1}{2}\sum_\nu \left\{(\bar{a}_{Q_\nu} - \bar{a}_{Q_{\nu_l}})\left[\sum_{(M_{c_\nu})}\left(\bar{a}_l - \frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}}{\mathrm{d}m} - \frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}_{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}m}\right)\mathrm{d}m + \right.\right.$$

$$+ \sum_{(M_{a_\nu})}\left(\bar{a}_l - \frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}}{\mathrm{d}m} - \frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}_r}{\mathrm{d}m} - \frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}_{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}m}\right)\mathrm{d}m + \sum_{(M_{d_\nu})}\left(\bar{a}_l - \frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}}{\mathrm{d}m} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}_r}{\mathrm{d}m} - \frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}_{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}m}\right)\mathrm{d}m\right] + (\bar{\varepsilon}_\nu - \bar{\varepsilon}_{\nu_l})\left[\sum_{(M_{c_\nu})}\bar{r}' \times \left(\bar{a}_l - \frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}}{\mathrm{d}m} - \frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}_{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}m}\right)\mathrm{d}m + \right. \tag{1.13}$$

$$+ \sum_{(M_{a_\nu})}\bar{r}' \times \left(\bar{a}_l - \frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}}{\mathrm{d}m} - \frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}_r}{\mathrm{d}m} - \frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}_{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}m}\right)\mathrm{d}m +$$

$$\left.\left. + \sum_{(M_{d_\nu})}\bar{r}' \times \left(\bar{a}_l - \frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}}{\mathrm{d}m} - \frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}_r}{\mathrm{d}m} - \frac{\mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}_{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}m}\right)\mathrm{d}m\right]\right\}.$$

On peut vérifier aisément les égalités :

$$\sum_{(M_{c_\nu})} (\mathrm{d}m\bar{a}_t - \mathrm{d}\overline{\overline{\mathcal{F}}} - \mathrm{d}\overline{\overline{\mathcal{F}}}_{\mathrm{int}}) = \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\overline{\overline{\mathcal{K}}}_{c_{\nu_t}}) - \overline{\overline{\mathcal{F}}}_{c_\nu} - \overline{\overline{\mathcal{F}}}_{\mathrm{int}_{c_\nu}}, \tag{1.14}$$

$$\sum_{(M_{a_\nu})} (\mathrm{d}m\bar{a}_t - \mathrm{d}\overline{\overline{\mathcal{F}}} - \mathrm{d}\overline{\overline{\mathcal{F}}}_r - \mathrm{d}\overline{\overline{\mathcal{F}}}_{\mathrm{int}}) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\overline{\overline{\mathcal{K}}}_{a_{\nu_t}}) - \frac{\mathrm{d}M_{\nu_1}}{\mathrm{d}t}\bar{v}_{C a_{\nu_t}} - \overline{\overline{\mathcal{F}}}_{a_\nu} - \overline{\overline{\mathcal{F}}}_{r a_\nu} - \overline{\overline{\mathcal{F}}}_{\mathrm{int}_{a_\nu}}, \tag{1.15}$$

$$\sum_{(M_{d_\nu})} (\mathrm{d}m\bar{a}_t - \mathrm{d}\overline{\overline{\mathcal{F}}} - \mathrm{d}\overline{\overline{\mathcal{F}}}_r - \mathrm{d}\overline{\overline{\mathcal{F}}}_{\mathrm{int}}) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\overline{\overline{\mathcal{K}}}_{d_{\nu_t}}) + \frac{\mathrm{d}M_{\nu_2}}{\mathrm{d}t}\bar{v}_{C d_{\nu_t}} - \overline{\overline{\mathcal{F}}}_{d_\nu} - \overline{\overline{\mathcal{F}}}_{r d_\nu} - \overline{\overline{\mathcal{F}}}_{\mathrm{int}_{d_\nu}}, \tag{1.16}$$

$$\sum_{(M_{c_\nu})} \bar{r}' \times (\mathrm{d}m\bar{a}_t - \mathrm{d}\overline{\overline{\mathcal{F}}} - \mathrm{d}\overline{\overline{\mathcal{F}}}_{\mathrm{int}}) =$$

$$= M_{\nu_c}\bar{r}'_{C_{c_\nu}} \times \bar{a}_Q + \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\overline{\mathcal{K}}_{Q_{\nu_{\mathrm{rot}_c}}}) - \overline{\mathcal{M}}_{Q_{\nu_c}} - \overline{\mathcal{M}}_{Q_{\nu_{\mathrm{int}_c}}}, \tag{1.17}$$

$$\sum_{(M_{a_\nu})} \bar{r}' \times (\mathrm{d}m\bar{a}_t - \mathrm{d}\overline{\overline{\mathcal{F}}} - \mathrm{d}\overline{\overline{\mathcal{F}}}_r - \mathrm{d}\overline{\overline{\mathcal{F}}}_{\mathrm{int}}) = M_{\nu a}\bar{r}'_{C a_\nu} \times \bar{a}_{Q_\nu} +$$

$$+ \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\overline{\mathcal{K}}_{Q_{\nu_{\mathrm{rot}_a}}}) - \frac{\mathrm{d}M_{\nu_1}}{\mathrm{d}t}\bar{r}'_{C_{\nu_a}} \times (\bar{\omega}_\nu \times \bar{r}'_{C_{\nu_a}}) - \overline{\mathcal{M}}_{Q_{\nu_a}} - \overline{\mathcal{M}}_{Q_{\nu_{r_a}}} - \overline{\mathcal{M}}_{Q_{\nu_{\mathrm{int}}}}, \tag{1.18}$$

$$\sum_{(M_{d_\nu})} \bar{r} \times (\mathrm{d}m\bar{a}_t - \mathrm{d}\overline{\overline{\mathcal{F}}} - \mathrm{d}\overline{\overline{\mathcal{F}}}_r - \mathrm{d}\overline{\overline{\mathcal{F}}}_{\mathrm{int}}) = \bar{M}_{\nu_d}\bar{r}'_{C_{d_\nu}} \times \bar{a}_{Q_\nu} +$$

$$+ \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\overline{\mathcal{K}}_{Q_{\nu_{\mathrm{rot}_d}}}) + \frac{\mathrm{d}M_{\nu_2}}{\mathrm{d}t}\bar{r}'_{C_{\nu_d}} \times (\bar{\omega}_\nu \times \bar{r}'_{C_{\nu_d}}) - \overline{\mathcal{M}}_{Q_{\nu_d}} - \overline{\mathcal{M}}_{Q_{\nu_{r_d}}} - \overline{\mathcal{M}}_{Q_{\nu_{\mathrm{int}_d}}}, \tag{1.19}$$

où $(\overline{\overline{\mathcal{F}}}_{c_\nu};\ \overline{\mathcal{M}}_{Q_{\nu_c}})$, $(\overline{\overline{\mathcal{F}}}_{a_\nu};\ \overline{\mathcal{M}}_{Q_{\nu_a}})$, $(\overline{\overline{\mathcal{F}}}_{d_\nu};\ \overline{\mathcal{M}}_{Q_{\nu_d}})$ sont les composantes des torseurs dans le pôle Q_ν des sollicitations actives appliquées dans les trois zones de la masse du solide (S_ν), $(\overline{\overline{\mathcal{F}}}_{r_{a_\nu}};\ \overline{\mathcal{M}}_{Q_{\nu_{r_a}}})$, $(\overline{\overline{\mathcal{F}}}_{r_{d_\nu}};\ \overline{\mathcal{M}}_{Q_{\nu_{r_d}}})$ sont les composantes des torseurs dans le pôle Q_ν des sollicitations réactives, [5], qui

agissent dans les zones de masse variable du solide (S_ν) et $(\overline{\mathcal{F}}_{\text{int}_{c_\nu}}\,;\ \overline{\mathcal{M}}_{Q_{\nu_{\text{int}_c}}})$, $(\overline{\mathcal{F}}_{\text{int}_{a_\nu}}\,;\ \overline{\mathcal{M}}_{Q_{\nu_{\text{int}_a}}})$, $(\overline{\mathcal{F}}_{\text{int}_{d_\nu}}\,;\ \overline{\mathcal{M}}_{Q_{\nu_{\text{int}_d}}})$ sont les composantes des torseurs, dans le même pôle Q_ν, des sollicitations intérieures qui agissent dans les trois zones de la masse du solide (S_ν).

On déduit encore les relations :

$$(1.20)\quad \bar{a}_{Q_\nu} - \bar{a}_{Q_{\nu_l}} = \frac{1}{M_\nu}\left[\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\overline{\mathcal{K}}_{\nu_l}) - \left(\frac{\mathrm{d}M_{\nu_1}}{dt}\,\bar{v}_{C_{a_{\nu_l}}} - \frac{\mathrm{d}M_{\nu_2}}{\mathrm{d}t}\bar{v}_{C_{d_{\nu_l}}}\right) - \overline{\mathcal{F}}_\nu - \overline{\mathcal{F}}_{r_\nu}\right],$$

$$(1.21)\quad \bar{\varepsilon}_\nu - \bar{\varepsilon}_{\nu_l} = \frac{1}{J_\nu}\left\{M_\nu \bar{r}'_{C_\nu}\times\bar{a}_{Q_\nu} + \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\overline{\mathcal{K}}_{Q_{\nu_{\text{rot}}}}) + \left[\frac{\mathrm{d}M_{\nu_1}}{\mathrm{d}t}\,\bar{r}'_{C_{a_\nu}}\times(\bar{\omega}_\nu\times\bar{r}_{a_\nu}) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\mathrm{d}M_{\nu_2}}{\mathrm{d}t}\,\bar{r}_{C_{d_\nu}}\times(\bar{\omega}_\nu\times\bar{r}'_{C_{d_\nu}})\right] - \overline{\mathcal{M}}_{Q_\nu} - \overline{\mathcal{M}}_{Q_{\nu_r}}\right\},$$

où J_ν signifie le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation, considéré, pour simplifier les calculs, de direction fixe dans l'espace.

En vertu des relations (1.14)...(1.21) on obtient, finalement, l'expression suivante pour la contrainte du mouvement réel par rapport au mouvement libre du système mécanique considéré :

$$(1.22)\quad C_l = \frac{1}{2}\sum_\nu\left\{\frac{1}{M_\nu}\left[\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\overline{\mathcal{K}}_{\nu_l}) - \left(\frac{\mathrm{d}M_{\nu_1}}{\mathrm{d}t}\,\bar{v}_{C_{a_{\nu_l}}} - \frac{\mathrm{d}M_{\nu_2}}{\mathrm{d}t}\,\bar{v}_{C_{d_{\nu_l}}}\right) - (\overline{\mathcal{F}}_\nu + \overline{\mathcal{F}}_{r_\nu})\right]^2 + \right.$$
$$+ \frac{1}{J_\nu}\left[M_\nu\bar{r}'_{C_\nu}\times\bar{a}_{Q_\nu} + \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}(\overline{\mathcal{K}}_{Q_{\nu_{\text{rot}}}}) - \left[\left(\frac{\mathrm{d}M_{\nu_1}}{\mathrm{d}t}\,\bar{r}'_{C_{a_\nu}}\times(\bar{\omega}_\nu\times\bar{r}'_{C_{a_\nu}}) - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \frac{\mathrm{d}M_{\nu_2}}{\mathrm{d}t}\,\bar{r}'_{C_{d_\nu}}\times(\bar{\omega}_\nu\times\bar{r}'_{C_{d_\nu}})\right)\right] - (\overline{\mathcal{M}}_{Q_\nu} + \overline{\mathcal{M}}_{Q_{\nu_r}})\right]^2\right\}.$$

Pour des systèmes mécaniques ayant des points de masses variables définis comme dans [5], $(\overline{\mathcal{M}}_{Q_\nu} = \overline{\mathcal{M}}_{Q_{\nu_r}} = 0,\ \bar{\omega}_r \simeq 0,\ \bar{r}'_{C_\nu} \simeq 0,\ \overline{\mathcal{K}}_{Q_{\nu_{\text{rot}}}} \simeq 0)$, on obtient pour la contrainte C_l l'expression connue dans la littérature, [15], réduite seulement aux termes qui désignent les translations.

2. Formulation du principe de Gauss

Pour un mouvement de transport varié du système mécanique considéré dans la première partie, la contrainte du mouvement varié par rapport au mouvement libre aura l'expression :

$$C_{v_t} = \frac{2}{\mathrm{d}t^4} \sum_{\nu} \left\{ \sum_{(M_{c_\nu})} [\bar{r}_v(t + \mathrm{d}t) - \bar{r}_l(t + \mathrm{d}t)]^2 \mathrm{d}m + \right.$$

(2.1)

$$\left. + \sum_{(M_{a_\nu})} [\bar{r}_v(t+\mathrm{d}t) - \bar{r}_l(t+\mathrm{d}t)]^2 \mathrm{d}m + \sum_{(M_{d_\nu})} [\bar{r}_v(t+\mathrm{d}t) - \bar{r}_l(t+\mathrm{d}t)]^2 \mathrm{d}m \right\}.$$

La relation évidente :

$$\bar{r}_v(t + \mathrm{d}t) - \bar{r}_l(t + \mathrm{d}t) = [\bar{r}_v(t + \mathrm{d}t) - \bar{r}(t + \mathrm{d}t)] +$$

(2.2)

$$+ [\bar{r}(t + \mathrm{d}t) - \bar{r}_l(t + \mathrm{d}t)] = \delta^* \bar{r} + [\bar{r}(t + \mathrm{d}t) - \bar{r}_l(t + \mathrm{d}t)]$$

permettra de transformer (2.1) sous la forme :

$$C_{v_t} = C_t + C^2 + \sum_{\nu} \left\{ \sum_{(M_{c_\nu})} \delta^* \bar{r} [\bar{r}(t + \mathrm{d}t) - \bar{r}_l(t + \mathrm{d}t)] \, \mathrm{d}m + \right.$$

2.3)

$$\left. + \sum_{(M_{a_\nu})} \delta^* \bar{r} [\bar{r}(t+\mathrm{d}t) - \bar{r}_l(t + \mathrm{d}t)] \mathrm{d}m + \sum_{(M_{d_\nu})} \delta^* \bar{r} [\bar{r}(t+\mathrm{d}t) - \bar{r}_l(t+\mathrm{d}t)] \mathrm{d}m \right\},$$

où l'on avait noté par C^2 l'expression :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^4} \sum_{\nu} \left[\sum_{(M_{c_\nu})} \delta^{*2} \bar{r} \mathrm{d}m + \sum_{(M_{a_\nu})} \delta^{*2} \bar{r} \mathrm{d}m + \sum_{(M_{d_\nu})} \delta^{*2} \bar{r} \mathrm{d}m \right] = C^2 > 0. \tag{2.4}$$

L'introduction dans le dernier groupe de termes de l'expression (2.3) des substitutions évidentes :

$$\delta^* \bar{r} = \delta \bar{r}_{Q_\nu} + \delta \bar{\theta}_\nu \times r' \tag{2.5}$$

et

$$\bar{r}(t + \mathrm{d}t) - \bar{r}_l(t + \mathrm{d}t) = \frac{1}{3} \mathrm{d}t^2 \left[\bar{a}_t - \frac{\mathrm{d}\bar{\mathcal{F}}}{\mathrm{d}m} - \frac{\mathrm{d}\bar{\mathcal{F}}_r}{\mathrm{d}m} - \frac{\mathrm{d}\bar{\mathcal{F}}_{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}m} \right], \tag{2.6}$$

conduit, [4], à la conclusion :

$$\sum_{\nu} \left\{ \sum_{(M_{c_\nu})} \delta^* \bar{r} [\bar{r}(t+\mathrm{d}t) - \bar{r}_l(t+\mathrm{d}t)] \, \mathrm{d}m + \sum_{(M_{a_\nu})} \delta^* \bar{r} [\bar{r}(t+\mathrm{d}t) - \bar{r}_l(t+\mathrm{d}t)] \mathrm{d}m + \right.$$

(2.7)

$$\left. + \sum_{(M_{d_\nu})} \delta^* \bar{r} [\bar{r}(t + \mathrm{d}t) - \bar{r}_l(t + \mathrm{d}t)] \, \mathrm{d}m \right\} = - (\delta \mathcal{L}_t^i + \delta \mathcal{L}_t + \delta \mathcal{L}_{r_l}) = 0,$$

qui permet ensuite d'écrire (2.3) sous la forme :

$$C_{v_t} = C_t + C^2 > C_t. \tag{2.8}$$

Cette inégalité exprime donc le principe de Gauss dans la dynamique des systèmes mécaniques ayant de solides rigides de masses variables comme éléments constitutifs.

Reçue le 15 juillet 1972

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mécanique théorique

BIBLIOGRAPHIE

1. Deleanu Sp., Irimiciuc N., Neagu S., *Sur la dynamique du solide dont la masse est variable.* (I) *Caractéristiques dynamiques.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XVI (XX), *3—4*, s. IV (1970).
2. Deleanu Sp., Irimiciuc N., Stancu M., *Sur la dynamique du solide dont la masse est variable.* (II) *Théorèmes généraux.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XVII (XXI), *1—2*, s. IV (1971).
3. Deleanu Sp., Irimiciuc N., Crăciunaş A., *Sur les équations de la dynamique du solide dont la masse est variable.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XVII (XXI), *3—4*, s. IV (1971).
4. Deleanu Sp., Irimiciuc N., Neagu S., *Sur le principe du travail virtuel dans la dynamique des systèmes ayant de solides de masses variables comme éléments constitutifs.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XVIII (XXII), *1—2*, s. I (1972).
5. Deleanu Sp., Irimiciuc N., Crăciunaş A., *Sur la notion de „point matériel" dans la dynamique du solide dont la masse est variable.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XVIII (XXII), *1—2*, s. IV (1972).
6. Irimiciuc N., *Asupra mişcării relative a solidului cu masă variabilă.* Bul. Inst. polit. Iaşi, IV (VIII), *1—2* (1958).
7. Irimiciuc N., *Asupra formei ecuaţiilor lui Lagrange de specia a doua pentru sisteme de puncte cu mase variabile.* Bul. Inst. polit. Iaşi, IV (VIII), *1—2* (1958).
8. Irimiciuc N., Deleanu Sp., *Ecuaţii generalizate în sensul lui I. Ţenov şi D. Mangeron pentru sisteme de puncte materiale cu mase variabile.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XI (XV), *3—4* (1965).
9. Irimiciuc N., *Asupra unei noi forme de prezentare a mecanicii analitice pentru sisteme mecanice supuse la legături olonome.* Bul. Inst. polit. Iaşi, X (XIV), *3—4* (1964).
10. Irimiciuc N., Ibănescu I., Rusu E., *Sur le problème des liaisons holonomes imposées aux systèmes de solides rigides.* (I) *Liaisons géométriques.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XIII (XVII), *3—4* (1967).
11. Irimiciuc N., Stancu M., *Une nouvelle relation pour exprimer le principe de Gauss.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XIII (XVII), *3—4* (1967).
12. Irimiciuc N., Deleanu Sp., *Les principes intégrales de la mécanique analytique dans la dynamique des systèmes de solides rigides.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XIV (XVIII), *3—4* (1967).
13. Niang S., *Théorie des systèmes variables de particules. Applications.* Thèse, Université de Dakar, Faculté des Sciences, 1964.
14. Новоселов В. С., *Некоторые вопросы механики переменных масс с учетом внутреннего движения частиц.* (I) Вестник ЛГУ, *19* (1956); (II) Вестник ЛГУ, *1* (1957).
15. Новоселов В. С., *Аналитическая механика систем с переменными массами.* Изд. ленинг. ун-та, 1969.

16. Сапа В. А., *Вариационные принципы в механике переменной массы.* Изв. АН КССР, сер. матем. и мех., *5* (1956).
17. Сапа В. А., *О вариационных принципах в механике переменной массы.* Изв. АН КССР, сер. матем. и мех., *9* (1960).

ASUPRA APLICĂRII PRINCIPIULUI LUI GAUSS ÎN DINAMICA SISTEMELOR DE SOLIDE RIGIDE CU MASE VARIABILE

(Rezumat)

Definindu-se noţiunea de *constrîngere a mişcării reale de transport în raport cu mişcarea liberă* a unui sistem mecanic avînd ca elemente constitutive solide rigide cu mase variabile, în sensul modelului mecanic adoptat în lucrările [1]...[5], se stabileşte expresia finală (1.22) a acestei constrîngeri, folosită apoi, în partea a doua a lucrării, pentru extinderea principiului lui Gauss la cazul unor asemenea sisteme mecanice, întîlnite în unele sectoare ale practicii inginereşti.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

УДК. 534.01

К КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ

А. С. КЕЛЬЗОН и Ю. Н. ЖУРАВЛЕВ

1. В задачах, связанных с проектированием и отстройкой колебательных систем, появляется необходимость в количественной оценке влияния изменения параметров системы, т.е. жесткостей и масс, на частоты собственных колебаний. Так, надлежащим выбором жёсткостей и масс упругих опор быстровращающихся роторов достигается снижение высшей собственной частоты ниже рабочего числа оборотов и сведение к нулю динамических составляющих реакций между валом и опорами [1].

Не менее важной является задача настройки системы на определенную частоту, т.е. определение таких параметров системы, при которых заданная частота является собственной.

Настоящая заметка посвящена выявлению некоторых количественных зависимостей, которые могут быть полезны при решеннии перечисленных задач.

Исследуем линейную однородную консервативную систему Q с n степенями свободы:

$$\sum_{j=i}^{n} (a_{ij}\ddot{q}_j + c_{ij}q_j) = 0, \qquad (i = 1,\ 2,\ldots,\ n). \tag{1}$$

Собственные частоты p_k^2, $(k = 1,\ 2,\ldots,\ n)$ системы находятся из уравнения частот:

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} - p^2a_{11} & c_{12} - p^2a_{12} & \ldots & c_{1n} - p^2a_{1n} \\ c_{21} - p^2a_{21} & c_{22} - p^2a_{22} & \ldots & c_{2n} - p^2a_{2n} \\ c_{n1} - p^2a_{n1} & c_{n2} - p^2a_{n2} & \ldots & c_{nn} - p^2a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{2.1}$$

или в сокращенной форме:

$$D = |\, c_{ij} - p^2a_{ij}\,| = 0, \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ldots,\ n). \tag{2.2}$$

Коэффициенты c_{ij}, a_{ij} образуют положительно определенные симметрические матрицы $C = \| c_{ij} \|$, $A = \| a_{ij} \|$ и являются функциями жёсткостных K_s и инерционных I_r параметров системы:

$$c_{ij} = \zeta_{ij}(K_s), \qquad (s = 1, 2, ..., l), \tag{3.1}$$

$$a_{ij} = \psi_{ij}(I_r), \qquad (r = 1, 2, ..., m). \tag{3.2}$$

Эдесь и в дальнейшем под *параметрами* понимаются значения отдельных коэффициентов жёсткостных элементов системы Q в направлении координатных осей, а также массы, осевые и центробежные моменты инерции.

Зависимость ζ_{ij} выражает пространственное расположение и ориентацию жёсткостных элементов системы и является линейной по отношению к параметрам K_s, функция же ψ_{ij} в большинстве случаев представляется тождеством.

Так, для колебательной системы, полученной в результате установки абсолютно твердого тела на N произвольно расположенных амортизаторах, параметрами K_s, $(s = 1, 2, ..., 3N)$ являются жёсткости амортизаторов в направлениях главных очей жёсткости x', y', z': $c_{qx'}$, $c_{qy'}$, $c_{qz'}$, $(q = 1, 2, ..., N)$; а параметрами I_r, $(r = 1, 2, ..., r)$ — масса M и моменты инерции масс J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{xz} относительно неподвижных координатных осей x, y, z, проходящих через ц.т. амортизированного объекта, причем $a_{ij} \equiv I_r$.

Образование матриц C и A и выражения (3.1),(3.2) для данного примера можно найти, например, в работе [2].

Следует отметить, что коэффициенты, на главных диагоналях матриц C и A не могут быть отрицательны, остальные коэффициенты могут оказаться как положительными, так и отрицательными.

На основании теорем о влиянии масс и жесткостей на собственные частоты [3] можно сделать следующие качественные оценки:

а) при увеличении любого жёсткостного параметра K_s без изменения инерционных параметров частоты системы увеличиваются или по крайней мере не уменьшаются;

б) при увеличении любого инерционного параметра I_r без изменения жёсткостных параметров частоты системы убывают или по крайней мере не возрастают.

Поскольку отстройка колебательных систем производится не только варированием параметров, но и изменением расположения жёсткостей и масс системы, наиболее целесообразно рассматривать количественное влияние на собственные частоты не самих параметров, а жёсткостных c_{ij} и инерционных a_{ij} коэффициентов.

2. Рассмотрим вначале случай изменения всех коэффициентов c_{ij}, $(i, j = 1, 2, ..., n)$ сустемы Q на одинаковую относительную величину β_c при фиксированных a_{ij}, т.е.

$$c^*_{ij} = c^0_{ij}(1 + \beta_c). \tag{4.1}$$

Здесь и в дальнейшем c_{ij}^0, a_{ij}^0 — исходные значения, c_{ij}^*, a_{ij}^* — новые значения коэффициентов c_{ij} и a_{ij}.

Тогда

$$c_{ij}^0 = \frac{c_{ij}^*}{1-\beta_c}. \tag{4.2}$$

При линейных соотношениях (3.1) выражения (4.1) и (4.2) тождественны изменению параметров K_s, $(s = 1, 2, ..., l)$ на относительную величину β_c.

По определению собственных частот имеем следующее тождество:

$$|c_{ij}^0 - p_k^2 a_{ij}| \equiv 0. \tag{5}$$

Подставив (4.2) в (5) и проделав несложные преобразования, найдем что все собственные частоты изменились на одинаковую относительную величину α_c, т.а. стали равными:

$$p_k^* = p_k(1 + \alpha_c), \tag{6}$$

где

$$\alpha_c = \sqrt{1+\beta_c} - 1. \tag{7}$$

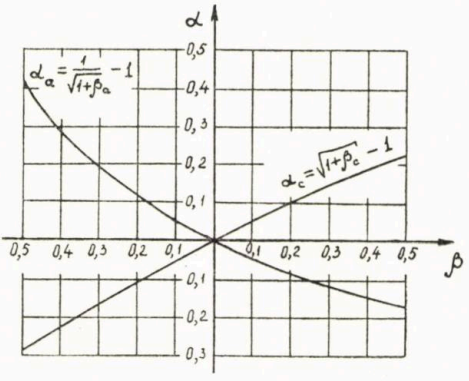


Рис. 1

Аналогично, при изменении всех коэффициентов a_{ij} на относительную величину β_a спектр собственных частот сместится на величину α_a, определяемую выражением:

$$\alpha_a = \frac{1}{\sqrt{1+\beta_a}} - 1. \tag{8}$$

Графики зависимостей (7) и (8) приведены на рис. 1.

При малых β_c и β_a имеем:

(9.1) $$\alpha_c \cong \frac{1}{2}\beta_c,$$ (9.2) $$\alpha_a \cong \frac{1}{2}\beta_a.$$

Не основании вышеприведенных качественных оценок можно показать, что при иэменении любого параметра системы Q или некоторой совокупности одноименных параметров на относительную величину β, изменеиие собственных частот с учетом (3.1), (3.2) и (4.1) не будет больше значения, определяемого выражениями (7), (8) или (9.1), (9.2).

Пусть коэффициенты c_{ij} и a_{ij} изменились одновременно на соответственные относительные величины β_c и β_a, т.е. стали равными

$$c^{\star}_{ij} = c^{0}_{ij}(1+\beta_c), \qquad a^{\star}_{ij} = a^{0}_{ij}(1+\beta_a).$$

Нетрудно показать, что собственные частоты в этом случае примут значения:

(10) $$p^{\star}_k = p\sqrt{\frac{1+\beta_c}{1+\beta_a}}.$$

Кроме того, если $\pm\beta_c$ и $\pm\beta_a$ — погрешности в определении коэффициентов c_{ij} и a_{ij} системы Q, то положение действительных собственных частот p_k будет определяться неравенством:

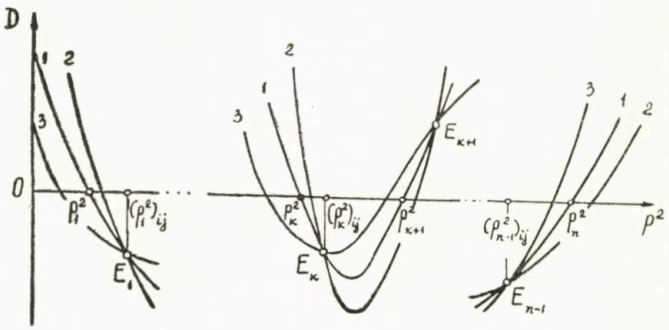
(11) $$p^{\star}_k\sqrt{\frac{1-\beta_c}{1+\beta_a}} \leqslant p_k \leqslant p^{\star}_k\sqrt{\frac{1+\beta_c}{1-\beta_a}},$$

где $p^{\star}_k$ — расчетные собственные частоты.

3. Собственные частоты p^2_k, $(k=1, 2,\ldots, n)$ системы Q являются корнями характеристического определителя D, являющегося полиномом степени n относительно p^2. Поскольку аналитическое определение корней полиномов степени выше второй связано с большими трудностями или вовсе невозможно, на практике применяются приближенные методы [4]: метод итераций, метод понижения, метод гармонических коэффициентов влияния и др. Кроме того, при наличии вычислительной техники широко применяется прямой метод, при котором строится кривая $D=D(p^2)$ и собственные частоты находятся как точки пересечения этой кривой с осью абсцисс (рис.2).

Предлагаемый ниже способ позволяет с меньшим количеством вычислений отыскивать новые значения собственных частот системы, изменившихся вследствии изменения коэффициентов c_{ij} и a_{ij}. Кроме того, применение этого метода позволяет без решения уравнения частот определять новые значения коэффициентов системы, при которых наперед заданная частота является собственной, т.е. производить настройку системы на определенную частоту.

Для этого рассмотрим поведение определителя $D=D(c_{ij},\ a_{ij},\ p^2)$ в плоскостях его аргументов при изменении одного коэффициента с индексом ij и фиксированных остальных.



1. $D = D(c^{\circ}_{ij},\ a^{\circ}_{ij},\ p^2),\ i = j$
2. $D = D(c^{*}_{ij},\ a^{\circ}_{ij},\ p^2),\ c^{*}_{ij} > c^{\circ}_{ii}$
3. $D = D(c^{\circ}_{ij},\ a^{*}_{ij},\ p^2),\ a^{*}_{ij} > a^{\circ}_{ij}$

Рис. 2

В силу равенств:

$$(12.1)\qquad \frac{\partial D}{\partial c_{ij}} = A_{ij}(p^2), \qquad (12.2)\qquad \frac{\partial D}{\partial a_{ij}} = -p^2 A_{ij}(p^2),$$

где: $A_{ij}(p^2)$ — алгебраическое дополнение элемента с индексом ij, определитель D в плоскостях коэффициентов c_{ij} и a_{ij} представляется семейством прямых с угловыми коэффициентами определяемыми приведенными равенствами (рис. 3 *а*, *б*).

Прямые $D=D(c_{ij},\ p_k^2)$ и $D=D(a_{ij},\ p_k^2)$ пересекаются в точках $(c^0_{ij},\ 0)$ и $(a^0_{ij},\ 0)$ соответственно.

Частоты $(p_q^2)_{ij}$, $(q=1,\ 2,\ldots,\ m)$, $(0 \leqslant m \leqslant n-1)$, являющиеся корнями уравнения $A_{ij}(p^2)=0$, условимся называть *особыми* частотами для элемента с индексом ij.

Прямые $D=D\{c_{ij},\ (p_q^2)_{ij}\}$ и $D=D\{a_{ij},\ (p_q^2)_{ij}\}$ проходят параллельно осям абсцисс, поэтому настройка системы на *особые* частоты путем изменения коэффициента с индексом ij невозможна.

Прямые $D=D(c_{ij},\ p_*^2)$ и $D=D(a_{ij},\ p_*^2)$, $p_*^2 \neq p_k^2 \neq (p_q^2)_{ij}$, пересекают ось абсцисс в точках c^*_{ij} и a^*_{ij}, в которых частоты p_*^2 являются собственными.

Семейство кривых $D=D(c_{ij},\ p^2)$ и $D=D(a_{ij},\ p^2)$ пересекаются в точках E_q, соответствующих особым частотам (рис. 2).

На основании теоремы о разделении корней векового уравнения положение $n-1$ особых частот элементов главной диагонали ($i=j$) определяется выражением

$$p_1^2 < (p_1^2)_{ii} < p_2^2 < \ldots < (p_{n-1}^2)_{ii} < p_n^2.$$

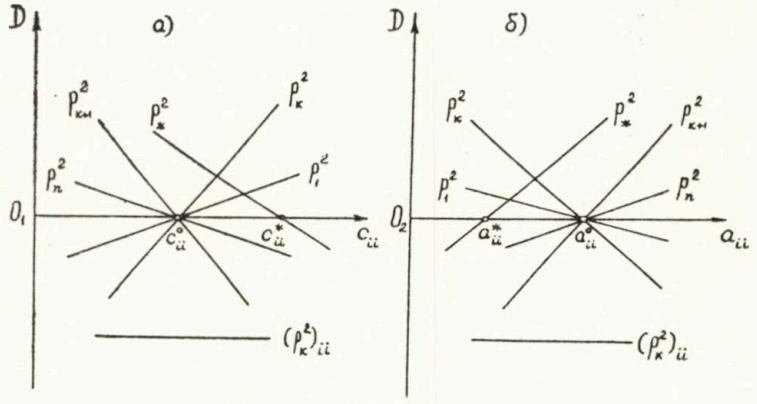


Рис. 3

Кроме того, можно показать, что для данных элементов выполняются следующие соотношения:

$$\text{sign}\{A_{ii}(p_k^2)\} = -\text{sign}\left\{\frac{\partial D}{\partial (p^2)}\bigg|_{p_k^2}\right\}, \tag{13.1}$$

$$\begin{cases} A_{ii}(p_k^2) > 0 & \text{при} \quad k = 1, 3, 5, \ldots, \\ A_{ii}(p_k^2) < 0 & \text{при} \quad k = 2, 4, 6, \ldots; \end{cases} \tag{13.2}$$

В случае $i \neq j$ количество особых частот находится в пределах $0 \leqslant m \leqslant n-1$, поэтому их положение в интервале (p_1^2, p_n^2) может быть самым разнообразным.

Изменение коэффициента приводит к сдвигу собственных частот. Из (12.1), (13.1), (13.2) следует, что для коэффциентов c_{ii} направление сдвига будет следующим: $(p_k^*)^2 > p_k^2$, если $c_{ii}^* > c_{ii}^0$ и наоборот. Для коэффициентов a_{ii} соответствует обратная зависимость. При $i \neq j$ направление сдвига разных собственных частот может быть различным.

Вышерассмотренные свойства характеристического определителя применим к решению сформулированных задач по количественной оценке.

Примечание. Здесь и в дальнейшем изменение коэффициентов c_{ij} и a_{ij} производится в пределах сохранения положительной определенности матриц C и A, что может быть проверено применением теоремы Якоби—Сильвестра [3].

4. Пусть нас интересует поведение собственной частоты p_k^2 при изменении коэффициента c_{ij} от старого значения c_{ij}^0 до нового c_{ij}^*.

Положим для определенности $c_{ij}^* > c_{ij}^0$.

а) Вычисляем $A_{ij}(p_k^2)$ и с этим угловым коэффициентом через точку $B_1(c_{ij}^0,\ p_k^2,\ 0)$ проводим прямую $1-1$ (рис. 4):

$$D=(c_{ij}-c_{ij}^0)A_{ij}(p_k^2).$$

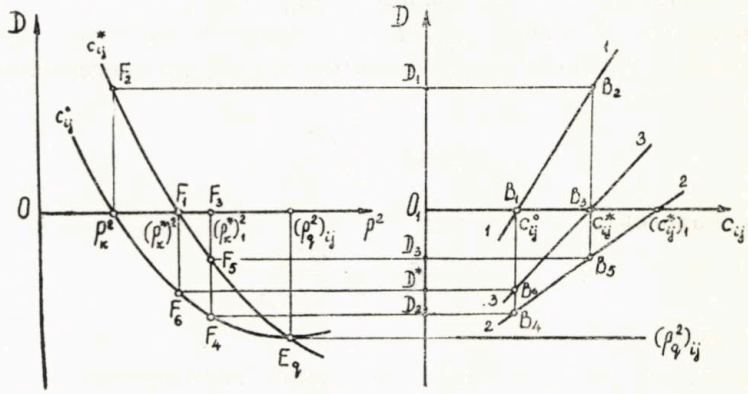


Рис. 4

Ордината B_2B_3 дает значение функции $D = D(c_{ij}^*,\ p_k^2)$ в точке $F_2(c_{ij}^*,\ p_k^2,\ D_1)$:

$$D_1=B_2B_3=(c_{ij}^*-c_{ij}^0)A_{ij}(p_k^2).$$

б) Задаемся первым приближением корня $(p_k^*)_1^2$ — точка F_3, находим $D_2=F_3F_4=D\{c_{ij}^0,\ (p_k^*)_1^2\}$ и откладываем его на плоскости DO_1c_{ij} — отрезок B_1B_4.

Вычисляем $A_{ij}\{(p_k^*)_1^2\}$ и через точку B_4 с этим угловым коэффициентом проводим прямую $2-2$:

$$D-D_2=(c_{ij}-c_{ij}^0)A_{ij}\{(p_k^*)_1^2\}.$$

Определив $D_3=B_3B_5=D_2+(c_{ij}^*-c_{ij}^0)A_{ij}\{(p_k^*)_1^2\}$, откладываем его на плоскости DOp^2 — точка $F_5\{c_{ij}^*,\ (p_k^*)_1^2,\ D_3\}$.

в) Если $|D_3| \ll |D_1|$ или $|c_{ij}^*-(c_{ij}^*)_1| \ll |c_{ij}^*-c_{ij}^0|$, то первое приближение частоты $(p_k^*)_1^2$ мало отличается от искомого значения $(p_k^*)^2$.

В противном случае для второго приближения методом хорд находим:

$$(14) \qquad (p_k^*)_2^2 = p_k^2 + \frac{D_1}{D_1 - D_3}[(p_k^*)_1^2 - p_k^2].$$

Таким же образом можно вычислить третье, четвертое и т.д. приближения, пока не будет достигнута необходимая точность.

Вышеизложенное с учетом (12.2) может быть распространено и на случай изменения коэффициентов инерции a_{ij}.

Рассмотрим задачу настройки системы Q на частоту p_*^2 путем изменения коэффициента c_{ij}, причем $p_*^2 \neq p_k^2 \neq (p_q^2)_{ij}$.

Определив $D^* = D(c_{ij}^0, p_*^2) = F_1F_6$ и проведя из точки $B_6(c_{ij}^0, D^*)$ прямую $3-3$ с угловым коэффициентом $A_{ij}(p_*^2)$ до пересечения с осью абсцисс, получим:

$$(15.1) \qquad c_{ij}^* = c_{ij}^0 - \frac{D^*}{A_{ij}(p_*^2)}.$$

По аналогии:

$$(15.2) \qquad a_{ij}^* = a_{ij}^0 + \frac{D^*}{p_*^2 A_{ij}(p_*^2)},$$

где $D^* = D(a_{ij}^0, p_*^2)$.

Выражения (15.1) и (15.2) дают точное решение задачи настройки и применимы для любого числа варьируемых коэффициентов.

5. Современные методы оптимальной отстройки основаны на поиске глобального экстремума целевого функционала, аргументами которого является множество одновременно варьируемых параметров [5], [6], поэтому использование их невыпольнимо без применения ЭЦВМ. Однако в некоторых практических задачах с целью сдвига спектра собственных частот из резонансно-опасной зоны требуется одностороннее варьирование достаточно небольшого числа параметров [1]. Используем вышеизложенные результаты для решения подобных задач.

В силу конструктивных соображений на коэффициенты системы Q могут быть наложены непрерывные или дискретные ограничения вида:

$$(16.1) \qquad c_{ij}' \leqslant c_{ij} \leqslant c_{ij}'', \quad \text{или} \quad c_{ij} = c_{ij}^{(1)}, c_{ij}^{(2)}, \ldots;$$

$$(16.2) \qquad a_{ij}' \leqslant a_{ij} \leqslant a_{ij}'', \quad \text{или} \quad a_{ij} = a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \ldots$$

Через ω^2 обозначим квадрат нижней границы резонансно-опасных частот, через p_n^2 — квадрат высшей собственной частоты системы.

Задача односторонней отстройки собственных частот сводится к такому изменению заданного числа коэффициентов c_{ij} и a_{ij}, при котором будет выполняться равенство $p_n^2 = \omega^2$. Оптимизация процесса отстройки в настоящей заметке не рассматривается.

С помощью выражений (7) и (8) всегда можно добиться одного из следующих соотношений между частотами:

(17.1) $p_{n-1}^2 < \omega^2 < p_n^2$, (17.2) $p_n^2 < \omega^2$.

В случае (17.1) отстройка путем варьирования отдельного коэффициента c_{ij} или a_{ij} при сохранении позитивности матриц C и A возможна только при условии:

(18.1) $$\operatorname{sign} D^* = \operatorname{sign} A_{ij}(\omega^2),$$

где: $D^* = D(c_{ij}^0, a_{ij}^0, \omega^2)$.

В случае (17.2) критерием возможности отстройки будет:

(18.2) $$\operatorname{sign} D^* = -\operatorname{sign} A_{ij}(\omega^2).$$

Очевидно, что из всех коэффициентов, с помощью которых отстройка выполнима, следует выбрать коэффициент с максимальным $|A_{ij}(\omega^2)|$.

Вышеизложенное остается в силе и на случай изменения нескольких коэффициентов. Здесь, кроме того, варьирование целесообразно начинать с коэффициентов с дискретными органичениями, доводку же производить коэффициентами с непрерывными ограничениями.

Отстройка производится с помощью выражений (15.1), (15.2) последовательным варьированием козффициентов и не требует решений уравнений частот.

Пример. Рассмотрим колебательную систему:

$$\begin{cases} 2\ddot{x} + 4x + 1{,}512y = 0, \\ \ddot{y} + 1{,}512x + 3y + 2{,}618z = 0, \\ \ddot{z} + 2{,}618y + 9z = 0. \end{cases}$$

Собственные частоты $p_1^2 = 1$, $p_2^2 = 3$, $p_3^2 = 10$ являются корнями характеристического определителя

$$D = \begin{vmatrix} 4 - p^2 & 1{,}512 & 0 \\ 1{,}512 & 3 - p^2 & 2{,}618 \\ 0 & 2{,}618 & 9 - p^2 \end{vmatrix}.$$

Пусть $\omega^2 = 8$ и условия задачи позволяют варьировать только коэффициентами главной диагонали, причем $a_{22} \equiv a_{33}$.

Последовательно ореределяем: $D^* = D(\omega^2) = 140$, $A_{11}(\omega^2) = -11{,}85$, $A_{22}(\omega^2) = -12$, $A_{33}(\omega^2) = 57{,}7$. С учетом (18.1) и условий задачи выбираем для варьирования коэффициенты c_{33}, a_{33}, a_{22}.

Пусть на коэффициенты наложены следующие органичения:

$$a_{22} \equiv a_{33} = 1{,}0;\ 1{,}1; \qquad 7 \leqslant c_{33} \leqslant 9.$$

Применение соотношений (15.1) и (15.2) показывает, что в пределах наложенных ограничений отстроить систему изменением какого-либо одного коэффициента невозможно.

Принимая $a_{22}^{*} = a_{33}^{*} = 1{,}1$, вычислим $D_1 = D(a_{22}^{*}, a_{33}^{*}, \omega^2) = 95{,}8$, $A_{33}(a_{22}^{*}, \omega^2) = 67{,}32$, и с помощью (15.1) находим: $c_{33}^{*} = 7{,}58$.

Итак, система имеет $p_3^2 = \omega^2 = 8$ при $a_{22}^{*} = a_{33}^{*} = 1{,}1$ и $c_{33}^{*} = 7{,}58$.

Поступила в 30 XII 1971 г.

Ленингр. высш. инж. морск. училища им. адм. С. О. Макарова, Катедра теоретической механики, Ленинград, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельзон А. С., *Самоцентрирование и уравновешивание жесткого ротора, вращающегося в двух упругих их опорах.* ДАН СССР, **110**, *1* (1956).
2. Меркин Д. Р., Калинович М. Л., Журавлев Ю. Н., *Исследование колебаний механизмов с неопорными упругими связями.* Тр. Ленингр. инст. водного трансп., *116* (1968).
3. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем.* Гостехиздат, 1950.
4. Бабаков И. М., *Теория колебаний.* Изд. „Наука", М., 1968.
5. Глазман И. М., Митин В. Н., *Отстройка вибрационных систем как задача выпуклого программирования.* ДАН СССР, **169**, *5* (1966)
6. Гринкевич В. К., Соболь И. М., Статников Р. Б., *Об одном метод поиска оптимальных параметров колебательной системы.* АН СССР Машиноведение, *1* (1971).

ASUPRA EVALUĂRII CANTITATIVE A INFLUENŢEI PARAMETRILOR SISTEMELOR OSCILANTE ASUPRA PULSAŢIILOR PROPRII

(Rezumat)

Se consideră un sistem oscilant conservativ cu n grade de libertate. Pentru anumite cazuri de modificare a coeficienţilor cuasielastici şi inerţiali ai sistemului se stabilesc dependenţe cantitative între pulsaţiile proprii şi variaţiile coeficienţilor. Ele se obţin studiind graficul determinantului ecuaţiilor pulsaţiilor în diverse plane ale argumentelor sale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.01:531.31

ASUPRA ECUAȚIEI MIȘCĂRII MAȘINII REALE

I. CALCULUL ENERGIEI CINETICE A MAȘINII

DE

CRISTIAN LINDE, N. IRIMICIUC și I. IBĂNESCU

0. Introducere

Plecînd de la ideea că transferul de energie de la un element la altul într-o mașină poate fi determinat prin randamentul cuplajului respectiv și că acest randament — subunitar, datorită pierderilor de energie provocate de frecări — poate fi considerat practic constant în timpul funcționării mașinii, chiar în regim tranzitoriu, autorii stabilesc o nouă formă pentru ecuația mașinii — ecuația lui Lagrange de specia a doua — în care se ține seama și de frecările uscate.

Lucrarea este organizată în două părți: *calculul energiei cinetice a mașinii* (prezentată aici) și *calculul forțelor generalizate și stabilirea ecuației de mișcare* (care urmează a fi inserată).

Pentru noțiunea de mașină a fost adoptată definiția curentă a mecanicii tehnice: este un sistem mecanic, dispunînd de o sursă proprie de energie mecanică, destinat executării unor operații bine precizate ale unui proces tehnologic.

Pentru a se da o largă aplicabilitate ecuației stabilite în lucrare, a fost adoptat unul din cele mai generale modele de mașină, model care poate fi particularizat la majoritatea covîrșitoare a tipurilor de mașini întîlnite astăzi în producție.Este vorba de o mașină formată dintr-un număr de m subansambluri de lucru (SL μ), ($\mu = 1, 2, \ldots m$), (fig. 1), acționate de același motor (M), fiecare din ansambluri conținînd cîte un sistem de transmisie (STμ) și un echipament de lucru (ELμ); toate subansamblurile se găsesc pe o platformă (Pf), în rotație, cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_0$ în jurul unei axe verticale trecînd prin centrul ei și în translație rectilinie, cu viteza orizontală $\bar{v}_0$, odată cu șasiul pe care se sprijină platforma.

Se adoptă următoarele ipoteze de lucru, în totală concordanţă cu realitatea întîlnită în practica inginerească :

1° Legăturile, exterioare şi interioare, aplicate organelor maşinii reduc la 1 numărul gradelor de libertate ale sistemului mecanic ce formează maşina, drept coordonată generalizată a ei putîndu-se alege unghiul de rotaţie proprie $\theta_1 = \theta$ al rotorului, acestei coordonate corespunzîndu-i ecuaţia Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta} = Q_a + Q_{fr}, \tag{0.1}$$

Q_a fiind forţa generalizată activă, iar Q_{fr} — forţa generalizată corespunzătoare forţelor de frecare şi cuplurilor de frecare, considerate cunoscute.

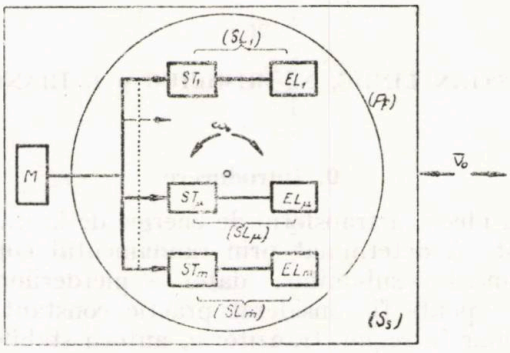


Fig. 1

2° Toate legăturile aplicate sînt olonome scleronome, ipoteză cu următoarele consecinţe :

a) Ecuaţiile de legătură, scrise sub forma finită :

$$f_\lambda(\ldots x_{G_{\nu\sigma}}, \theta_{\nu e}, \ldots) = 0, \tag{0.2}$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, l; \quad \nu = 1, 2, \ldots n; \ \sigma = 1, 2, 3; \ e = p, r, n),$$

unde $x_{G_{\nu\sigma}}$ şi $\theta_{\nu e}$ sînt parametrii de poziţie (coordonatele centrelor de masă şi unghiurile lui Euler) ale elementelor (S_ν) ale maşinii, permit să se exprime toţi parametrii de poziţie ca funcţiuni de unghiul de rotaţie proprie al rotorului :

$$x_{G_{\nu\sigma}} = x_{G_{\nu\sigma}}(\theta), \quad \theta_{\nu e} = \theta_{\nu e}(\theta), \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n; \ \sigma = 1,2,3; \ e = p, r, n). \tag{0.3}$$

b) Derivarea în raport cu timpul a expresiilor precedente conduce la relaţiile :

$$(0.4)\qquad \begin{cases} \dot{x}_{G_{\nu\sigma}} = \dfrac{dx_{G_{\nu\sigma}}}{d\theta}\,\dot{\theta}, \\ \dot{\theta}_{\nu e} = \dfrac{d\theta_{\nu e}}{d\theta}\,\dot{\theta}, \end{cases}$$

în baza cărora parametrii cinematici de ordinul întîi ai elementelor mașinii vor avea expresiile :

$$(0.5)\qquad \begin{cases} \bar{v}_{G_\nu} = \overline{V}_\nu(\theta)\,\omega, \\ \bar{\omega}_\nu = \overline{\Omega}_\nu(\theta)\,\omega, \quad (\nu = 1,\ 2\ ,\ldots,\ n). \end{cases}$$

c) În expresia energiei cinetice va intra numai un termen :

$$(0.6)\qquad E = \frac{1}{2}\,g(\theta)\dot{\theta}^2,$$

coeficientul $g(\theta)$ reprezentînd chiar momentul de inerție al sistemului mecanic redus la axa de rotație a rotorului.

3° Organele tuturor sistemelor de transmisie execută, față de platformă, numai mișcări relative de rotație în jurul unor axe centrale de inerție orizontale, fixate de platformă și deci mobile odată cu platforma în spațiu.

4° Organele echipamentelor de lucru pot fi împărțite, după mișcările lor relative față de platformă, în următoarele trei grupe : organe cu mișcări plan-paralele în plane verticale ; organe cu mișcări plan-paralele în plane orizontale ; organe cu mișcări de șurub, cu axele formînd unghiuri oarecare cu planul orizontal.

5° Se admite că randamentele diverselor cuplaje între organele mașinii nu variază în timpul funcționării, chiar în regimurile tranzitorii.

6° Pentru stabilirea ecuației de mișcare se consideră cazul cel mai general, cînd toate subansamblurile de lucru funcționează simultan. În expresiile diverșilor termeni ai ecuației vor fi separați însă termenii corespunzători celor două mișcări componente ale organelor — relativă și de transport — astfel încît expresiile respective vor putea fi particularizate cu ușurință la cazurile cînd unele din subansambluri nu vor fi în funcțiune precum și la cazurile cînd platforma și șasiul ar fi fixe, deci cînd nu ar avea loc mișcarea de transport.

În continuare, se efectuează calculul energiei cinetice a mașinii.

1. Energia cinetică a șasiului în translație

Pentru energia cinetică a șasiului, în translație rectilinie realizată, obișnuit, prin intermediul unui număr de n_R perechi de roți, de mase M_R și raze R, acționate de motorul mașinii, se găsește expresia :

$$E_S = \frac{1}{2} J_{Sr} \omega^2, \tag{1.1}$$

unde ω este viteza unghiulară a rotorului, iar J_{Sr} este momentul de inerție al șasiului, redus la axa de rotație a rotorului, dat de relația :

$$J_{Sr} = \frac{1}{i_R^2} [M_S R^2 + 2n_R(M_R R^2 + J_R)], \tag{1.2}$$

M_S fiind masa șasiului, J_R — momentele de inerție ale roților în raport cu axele lor de rotație, iar i_R — raportul de transmisie al roților conducătoare față de rotor.

Condiția

$$\frac{1}{i_R} = 0 \tag{1.3}$$

va caracteriza starea de repaos a șasiului.

2. Energia cinetică a platformei și a pieselor fixate pe ea

Platforma cu piesele fixate pe ea (carcasa motorului, corpurile de legătură ale diverselor organe etc.), având masa totală M_P și momentul de inerție față de axa verticală în jurul căreia se rotește, egal cu J_P , execută o mișcare plan-paralelă orizontală, cu parametrii cinematici de ordinul întîi $\bar{v}_0$ și ω_0, cu $\omega_0 = (1/i_P)\omega$, unde i_P este raportul de transmisie al rotației platformei față de rotor. Notînd cu a_P distanța centrului de masă al platformei la axa ei de rotație, rezultă pentru energia ei cinetică expresia :

$$E_P = \frac{1}{2} J_{Pr} \omega^2, \tag{2.1}$$

unde

$$J_{Pr} = M_P \left[\frac{R^2}{i_R^2} + 2 \frac{R a_P}{i_R i_P} \sin\left(\frac{1}{i_P} \theta \right) \right] + J_P \frac{1}{i_P^2} = J_{Pr}(\theta) \tag{2.2}$$

este momentul de inerție al platformei redus la axa de rotație a rotorului.

În absența oricărei mișcări de transport :

$$\frac{1}{i_R} = \frac{1}{i_P} = 0,$$

rezultă :

$$J_{Pr} = 0. \tag{2.3}$$

3. Energia cinetică a rotorului motorului

Rotorul motorului execută o mișcare spațială generală, rezultînd dintr-o rotație relativă față de platformă, efectuată în jurul unei axe orizontale, și dintr-o mișcare de transport efectuată odată cu platforma. În aceste condiții rezultă pentru energia cinetică a rotorului următoarea expresie:

$$E_{Rt} = \frac{1}{2}(J_{Rt_r} + J_{Rr})\omega^2, \tag{3.1}$$

J_{Rt} fiind momentul de inerție al rotorului față de axa sa de rotație proprie, iar J_{Rt_r} — momentul de inerție redus datorat mișcării de transport, moment determinat prin relația:

$$J_{Rt_r} = M_{Rt}\left[\frac{R^2}{i_R^2} + 2\,\frac{Ra_{Rt}}{i_R i_P}\sin\left(\theta^0_{Rt} + \frac{0}{i_P}\right) + \frac{a_{Rt}^2}{i_P^2}\right] + \frac{J_{\Delta Rt}}{i_P^2}, \tag{3.2}$$

unde M_{Rt} este masa rotorului, a_{Rt} — distanța centrului de masă al rotorului la axa de rotație a platformei, $J_{\Delta Rt}$ — momentul de inerție al rotorului față de o axă normală la axa sa de rotație proprie și trecînd prin centrul de masă al rotorului, iar θ^0_{Rt} — unghiul inițial format de vectorul $\overrightarrow{QG_{Rt}}$ cu viteza de translație.

Din expresia mărimii $J_{Rt_r} = J_{Rt_r}(0)$, rezultă că în absența mișcării de transport $(1/i_R = 1/i_P = 0)$

$$J_{Rt_r} = 0. \tag{3.3}$$

4. Energia cinetică a organelor sistemelor de transmisie

În baza ipotezelor adoptate în introducere rezultă că organele sistemelor de transmisie vor avea mișcări spațiale generale, rezultînd din rotații proprii relative față de platformă, efectuate în jurul unor axe orizontale, și din mișcări de transport plan-paralele orizontale, efectuate odată cu platforma.

Notînd cu n_μ numărul organelor în rotații relative față de platformă din sistemul de transmisie (ST_μ), cu $J_{\mu\nu}$ — momentele de inerție ale lor față de axele de rotație proprie, cu $J_{\Delta\mu\nu}$ — momentele centrale de inerție față de axele normale la axele de rotație proprie, cu $a_{\mu\nu}$ — distanțele centrelor de masă ale acestor organe la axa de rotație a platformei, cu $\theta^0_{\mu\nu}$ — unghiurile inițiale formate cu viteza de translație de către vectorii de poziție ai centrelor de masă amintite în raport cu un pol luat pe axa de rotație a platformei și cu $i_{\mu\nu}$ — raportul de transmisie al organului cu numărul de ordine ν

din sistemul de transmisie cu numărul de ordine μ față de rotor, rezultă pentru energia cinetică a organelor mobile față de platformă ale tuturor sistemelor de transmisie, următoarea expresie :

$$E_{T r} = \frac{1}{2}\left[J_{T r_r} + \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n_\mu}\frac{1}{i^2_{\mu\nu}}J_{\mu\nu}\right]\omega^2, \tag{4.1}$$

unde mărimea $J_{T r}$, denumită moment de inerție redus la axa rotorului corespunzător mișcării de transport a sistemelor de transmisie, este dată de relația :

$$J_{T r_r} = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n_\mu}\left\{M_{\mu\nu}\left[\frac{R^2}{i^2_R} + 2\frac{Ra_{\mu\nu}}{i_R i_P}\sin\left(\theta^0_{\mu\nu} + \frac{\theta}{i_P}\right) + \frac{a^2_{\mu\nu}}{i^2_P}\right] + \frac{J_{\Delta\mu\nu}}{i^2_P}\right\}. \tag{4.2}$$

În absența mișcării de transport ($1/i_R = 1/i_P = 0$) termenul $J_{T r_r} = J_{T r_r}(\theta)$ devine zero :

$$J_{T r_r} = 0. \tag{4.3}$$

5. Energia cinetică a organelor echipamentelor de lucru

Este vorba de stabilirea expresiilor energiilor cinetice ale organelor cu mișcări relative față de platformă din echipamentele de lucru ale mașinii. După ipotezele menționate în introducere, vor fi luate în considerație următoarele situații :

5.1. Energia cinetică a organelor cu mișcări plane verticale

Se notează cu $(S^v_{\mu\nu})$, $(\lambda = 1,\ 2,\ldots\ l_\mu)$, unul din organele echipamentului (EL_μ) în mișcare plan-paralelă verticală — l_μ fiind numărul total de asemenea elemente existînt în echipamentul considerat — , cu $M^v_{\mu\nu}$—masa acelui organ ; cu $J^v_{\mu\nu}$ — momentul central de inerție în raport cu axa de rotație proprie ; cu $J^v_{\mu\lambda_1}$, și $J^v_{\mu\lambda_2}$ — celelalte două momente centrale de inerție ; cu $i^v_{\mu\lambda}$ — raportul de transmisie al rotației proprii față de rotor cu $a^v_{\mu\lambda}(\theta)$ — distanța, cunoscută ca funcție de unghiul θ, a centrului de masă $G^v_{\mu\lambda}$ la axa de rotație a platformei ; cu $\varkappa_{\mu\lambda}(\theta)$ — unghiul, cunoscut ca funcție de θ, format de distanța $a^v_{\mu\lambda}$ cu planul vertical $\Pi_{\mu\lambda}$ în care se mișcă elementul $(S^v_{\mu\lambda})$; cu $v^v_{\mu\lambda} = V_{\mu\lambda}(\theta)\,\omega$ — viteza, cunoscută ca funcție de argumentele θ și ω, în translația relativă a elementului $(S^v_{\mu\lambda})$; cu $\psi_{\mu\lambda}(\theta)$ — unghiul, cunoscut ca funcție de θ, format de viteza $\vec{v}^v_{\mu\lambda}$ cu paralela la urma pe planul platformei a planului $\Pi_{\mu\lambda}$; cu $\varphi_{\mu\lambda}$ — unghiul, constant, format cu axa absciselor legată de platformă, de către planul $\Pi_{\mu\lambda}$ și cu $\theta^v_{\mu\lambda}(\theta)$ —unghiul

format cu verticala de axa absciselor legată invariabil cu elementul $(S^v_{\mu\lambda})$, unghi considerat, de asemenea, cunoscut ca funcție de timp (în baza ecuațiilor legăturilor aplicate sistemului mecanic).

Efectuînd calculele, se găsește pentru energia cinetică a organelor echipamentelor de lucru cu mișcări relative plan-paralele verticale față de platformă, următoarea expresie :

$$E^v_{El} = \frac{1}{2}\left[J^v_{El_r} + \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\lambda=1}^{l_\mu}\left(M^v_{\mu\lambda} V^2_{\mu\lambda} + J^v_{\mu\lambda}\frac{1}{i^2_{\mu\lambda}}\right)\right]\omega^2, \tag{5.1}$$

unde prin $J^v_{El_r}$ a fost notată expresia :

$$\begin{cases} J^v_{El_r} = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\lambda=1}^{l_\mu}\left\{M^v_{\mu\lambda}\left[\frac{R^2}{i^2_R} + \frac{a^2_{\mu\lambda}}{i^2_P} - 2\frac{RV_{\mu\lambda}}{i_R}\cos(\theta_0+\varphi_{\mu\lambda})\cos\psi_{\mu\lambda} + \right.\right. \\ \quad + 2\frac{a^v_{\mu\lambda}R}{i_R i_P}\sin(\theta_0+\varphi_{\mu\lambda}-\chi_{\mu\lambda}) + 2\frac{a^v_{\mu\lambda}V_{\mu\lambda}}{i_R}\sin\chi_{\mu\lambda}\cos\psi_{\mu\lambda}\Big] + \\ \quad \left.\left. + \left[J^v_{\mu\lambda_1}\frac{1}{i^2_P}\cos^2\theta^v_{\mu\lambda} + J^v_{\mu\lambda_2}\frac{1}{i^2_P}\sin\theta^v_{\mu\lambda}\right]\right\}. \end{cases} \tag{5.2}$$

Este ușor de verificat că în absența mișcării de transport $(1/i_R = 1/i_P = 0)$ acest termen devine zero :

$$J^v_{El_r} = 0. \tag{5.3}$$

5.2. Energia cinetică a organelor cu mișcări plan-paralele orizontale

Se notează cu $(S^h_{\mu\rho})$, $(\rho = 1, 2, ..., r_\mu)$, elementul cu numărul de ordine ρ din echipamentul de lucru (El_μ) în mișcare plan-paralelă orizontală ; cu $M^h_{\mu\rho}$ — masa lui; cu $J^h_{\mu\rho}$ — momentul său de inerție în raport cu axa de rotație proprie trecînd prin centrul său de masă ; cu $a^h_{\mu\rho} = a^h_{\mu\rho}(\theta)$ — distanța, cunoscută ca funcție de unghiul θ, a centrului de greutate $G^h_{\mu\rho}$ la axa de rotație a platformei ; cu $\beta_{\mu\rho} = \beta_{\mu\rho}(\theta)$ și $\gamma_{\mu\rho} = \gamma_{\mu\rho}(\theta)$ — unghiurile cunoscute ca funcții de unghiul θ în baza ecuațiilor de legătură, formate de distanța $a^h_{\mu\rho}$ cu paralela la axa absciselor legată de platformă, respectiv cu viteza de translație relativă a elementului $(S^h_{\mu\rho})$, $v^h_{\mu\rho}$; cu $v^h_{\mu\rho} = H_{\mu\rho}(\theta)\omega$, $H_{\mu\rho}(\theta)$ fiind, de asemenea, funcție cunoscută de θ și cu $i^h_{\mu\rho}$ — raportul de transmisie al rotației proprii a elementului $(S^h_{\mu\rho})$ în raport cu rotorul motorului.

Efectuînd și acum calculele, se găsește pentru energia cinetică a organelor echipamentelor de lucru cu mișcări plan-paralele orizontale, expresia :

$$E^h_{El} = \frac{1}{2}\left[J^h_{El_r} + \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\rho=1}^{r_\mu}\left(M^h_{\mu\rho}\, H_{\mu_\rho} + J^h_{\mu\rho}\frac{1}{i^{h2}_{\mu\rho}}\right)\right]\omega^2, \tag{5.4}$$

unde prin $J^h_{El_r} = J^h_{El_r}(\theta)$ a fost notată expresia :

$$J^h = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\rho=1}^{r_\mu}\left\{M^h_{\mu\rho}\left[\frac{R^2}{i^2_R} + \frac{a^{h2}_{\mu\rho}}{i^2_P} - 2\frac{RH_{\mu\rho}}{i_R}\cos(\theta_0 + \beta_{\mu\rho} - \gamma_\mu) + \right.\right. \tag{5.5}$$

$$\left.\left. + 2\frac{a^h_{\mu\rho}R}{i_R i_P}\sin(\theta_0 + \beta_{\mu\rho}) - 2\frac{a^h_{\mu\rho}H_{\mu\rho}}{i_P}\sin\gamma_{\mu\rho}\right] + J^h_{\mu\rho}\left(\frac{1}{i^2_P} + 2\frac{1}{i_P i^h_{\mu\rho}}\right)\right\}.$$

În absenţa mişcării de transport ($1/i_R = 1/i_P = 0$) acest termen devine zero :

$$J^h_{El_r} = 0. \tag{5.6}$$

5.3. Energia cinetică a organelor cu mişcări relative de şurub

Se notează şi acum cu ($S^s_{\mu\sigma}$) unul din elementele cu mişcare relativă de şurub din echipamentul (El_μ), ($\sigma = 1, 2, \ldots s_\mu$), s_μ fiind numărul total de asemenea elemente existente în echipamentul cu numărul de ordine μ ; cu $M^s_{\mu\sigma}$ — masa acelui element ; cu $J^s_{\mu\sigma}$ — momentele centrale de inerţie faţă de axa de rotaţie proprie, cu $J^s_{\Delta\mu\sigma}$ — momentul central de inerţie faţă de axele normale la axa de rotaţie proprie ; cu $p_{\mu\sigma}$ — parametrul mişcării de şurub a elementului considerat ; cu $i^s_{\mu\sigma}$ — raportul de transmisie între rotaţia proprie şi rotaţia rotorului ; cu $a^s_{\mu\sigma}$ — distanţa centrului de masă $G^s_{\mu\sigma}$ a organului considerat la axa de rotaţie a platformei, $a^s_{\mu\sigma}$ fiind şi de astădată funcţie cunoscută de unghiul de rotaţie θ ; cu $\varphi^s_{\mu\sigma} = \varphi^s_{\mu\sigma}(\theta)$ — unghiul format cu axa absciselor legată de platformă de proiecţia pe planul platformei a distanţei $a^s_{\mu\sigma}$; cu $\beta^s_{\mu\sigma}$ şi $\alpha^s_{\mu\sigma}$ — unghiurile, constante, formate de axa mişcării de şurub cu planul platformei, respectiv de proiecţia sa pe planul platformei cu axa ordonatelor legată invariabil de platformă.

După efectuarea calculelor, se găseşte pentru energia cinetică a tuturor organelor echipamentelor de lucru cu mişcări relative de şurub, expresia :

$$E^s_{El} = \frac{1}{2}\left[J^s_{\mathrm{El}_r} + \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{s_\mu}\frac{1}{i^{s2}_{\mu\sigma}}(M^s_{\mu\sigma}\, p^2_{\mu\sigma} + J^s_{\mu\sigma})\right]\omega^2, \tag{5.7}$$

unde prin $J^s_{El_r} = J^s_{El_r}(\theta)$ a fost notată expresia :

$$J^s_{El_r} = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\sigma=1}^{s_\mu} \left\{ M^s_{\mu\sigma} \left[\frac{R^2}{i^2_R} + \frac{a^{s^2}_{\mu\sigma}}{i^2_P} - 2\frac{Rp_{\mu\sigma}}{i_R i^s_{\mu\sigma}} \sin(\theta_0 + \alpha^s_{\mu\sigma}) \cos\beta^s_{\mu\sigma} - \right.\right.$$

$$(5.8) \qquad - 2\frac{a^s_{\mu\sigma} p_{\mu\sigma}}{i_P i^s_{\mu\sigma}} \cos(\alpha^s_{\mu\sigma} - \varphi^s_{\mu\sigma}) \cos\beta^s_{\mu\sigma} + 2\frac{a^s_{\mu\sigma} R}{i_R i_P} \sin(\theta_0 + \varphi^s_{\mu\sigma}) \Big] +$$

$$\left. + \left[J^s_{\Delta\mu\sigma} \frac{1}{i^2_P} \cos^2\beta^s_{\mu\sigma} + J^s_{\mu\sigma} \frac{1}{i^2_P} \sin^2\beta^s_{\mu\sigma} - 2J^s_{\alpha\sigma} \frac{1}{i_P i^s_{\mu\sigma}} \sin\beta^s_{\mu\sigma} \right] \right\}.$$

În absenţa mişcării de transport, şi acest termen devine egal cu zero, adică pentru $1/i_R = 1/i_R = 0$ rezultă :

$$(5.9) \qquad J^s_{El_r} = 0.$$

6. Energia cinetică a maşinii

Se introduc următoarele notaţii :

$$(6.1) \qquad J_{t_r} = J_{S_r} + J_{P_r} + J_{Rt_r} + J_{Tr_r} + J^v_{El_r} + J^h_{El_r} + J^s_{El_r} = J_{t_r}(\theta),$$

mărimea J_{t_r} fiind numită *moment de inerţie redus de transport al maşinii*; apoi

$$(6.2) \qquad J_{\text{trans}_r} = \sum_{\mu=1}^{m} \left[\sum_{\lambda=1}^{l_\mu} M^v_{\mu\lambda} V^2_{\mu\lambda} + \sum_{\rho=1}^{r_\mu} M^h_{\mu\rho} H^2_{\mu\rho} + \sum_{\rho=1}^{s_\mu} \frac{1}{i^{s^2}_{\mu\sigma}} M^s_{\mu\sigma}\, p^2_{\mu\sigma} \right] = J_{\text{trans}_r}(\theta),$$

mărimea J_{trans_r} fiind numită *moment de inerţie redus al maşinii corespunzător translaţiilor relative* şi

$$(6.3) \qquad J_{\text{rot}_r} = \lambda_1 J_1,$$

cu

$$(6.4) \qquad J_1 = J_{Rt}$$

şi

$$(6.5) \qquad \lambda_1 = 1 + \sum_{\mu=1}^{m} \left(\sum_{\nu=1}^{n_\mu} \frac{J_{\mu\nu}}{J_1} \frac{1}{i^2_{\mu\nu}} + \sum_{\lambda=1}^{l_\mu} \frac{J^v_{\mu\lambda}}{J_1} \frac{1}{i^{v^2}_{\mu\lambda}} + \sum_{\rho=1}^{r_\mu} \frac{J^h_{\mu\rho}}{J_1} \frac{1}{i^{h^2}_{\mu\rho}} + \sum_{\sigma=1}^{s_\mu} \frac{J^s_{\mu\sigma}}{J_1} \frac{1}{i^{s^2}_{\mu\sigma}} \right),$$

mărimea J_{rot_r} numindu-se *moment de inerţie redus al maşinii corespunzător rotaţiilor relative.*

În baza acestor notaţii se poate scrie următoarea expresie pentru energia cinetică a maşinii :

$$(6.6) \qquad E = \frac{1}{2}(J_{t_r} + J_{\text{trans}_r} + J_{\text{rot}_r})\omega^2,$$

iar în absența mișcării de transport ($1/i_R = 1/i_P = 0$ și deci $J_{t_r} = 0$), expresia redusă

$$E = \frac{1}{2}(J_{\text{trans}_r} + J_{\text{rot}_r})\omega^2. \tag{6.7}$$

Toate expresiile stabilite mai sus vor fi folosite în partea a doua a lucrării.

Primită la 10 iulie 1972

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de tehnologia construcției
de mașini și mecanică agricolă
și
catedra de mecanică teoretică

BIBLIOGRAFIE

1. Артоболевский И. И., *Теория механизмов и машин.* ГИТТЛ, М., 1953.
2. Irimiciuc N., *Mecanica.* E. D. P., Buc., 1965.
3. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И., *Курс теоретической механики.* ГИТТЛ, М., 1955.
4. Vâlcovici V., Bălan Șt., Voinea R., *Mecanică teoretică.* Ed. tehn., Buc., 1968.
5. Whittaker E. T., *Analytical Dynamics.* Cambridge, 1937.

SUR L'ÉQUATION DU MOUVEMENT DE LA MACHINE RÉELLE

I. Calcul de l'énergie cinétique

(Résumé)

Tout en partant de l'idée que le transfert de l'énergie d'un élément à l'autre dans une machine peut être déterminé par le rendement du couplage respectif et que ce rendement peut être considéré pratiquement constant pendant le fonctionnement de la machine, même dans les régimes transitoires, les auteurs vont établir une nouvelle forme pour l'équation de Lagrange, capable de décrire le mouvement de la machine sans négliger les frottements.

Dans cette première Note sont établies les expressions des divers termes de l'énergie cinétique, qui serront utilisées dans la Note suivante pour déduire la nouvelle forme de l'équation de la machine réelle.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 621-25;534.01

VIBRATIONS D'UNE MACHINE CENTRIFUGE NON-ÉQUILIBRÉE

I. ROTOR MONTÉ SUR UN ARBRE ÉLASTIQUE

PAR

CLAUDE BILLOT

0. Introduction

Le présent travail est consacré à l'étude théorique et expérimentale d'une essoreuse du type pendulaire. Il s'agit essentiellement de réduire les vibrations parasites de ces appareils utilisés dans l'industrie sucrière.

Il este important de connaître avec précision les vitesses critiques de telles machines, vitesses qui dépendent de la vitesse de rotation par effet gyroscopique. Les vitesses critiques sont liées aux masses et aux raideurs des supports et des charpentes auxquels est fixée l'essoreuse. Le problème consiste donc à assurer aussi parfaitement que possible l'isolation active et passive.

Différentes solutions ont été envisagées :

a) choix judicieux des paramètres du système ;

b) introduction d'une articulation au voisinage du centre de gravité du rotor ;

c) système d'autoéquilibrage.

Ces solutions ont été soumises à des vérifications expérimentales.

1. Mise en équations

1.1. Considérons un arbre homogène de longueur l supportant un disque encastré sur lui ; le système est animé d'une vitesse de rotation propre ω (fig. 1). Les dimensions transversales de l'arbre étant faibles vis-à-vis de celles du disque, on choisit une déformée statique de l'arbre de la forme :

$$Y(Z) = \frac{1}{6} A (z - l)^3 + \frac{1}{2} B (z - l)^2 + C(z - l) + D. \tag{1.1.1}$$

Nous considérons en O une articulation exerçant un couple de rappel proportionnel à l'angle de rotation, les conditions aux limites à cette extrémité sont :

$$\begin{cases} Y(0) = 0, \\ EIY''(0) = kY'(0), \qquad k = \text{constante.} \end{cases}$$

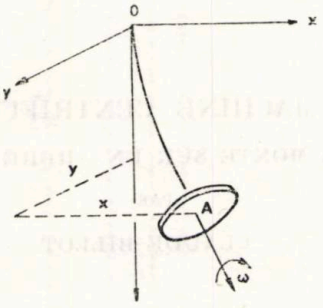


Fig. 1. — Schéma de l'arbre.

Les coordonnées de l'extrémité A de l'arbre sont (x, y, l) ; les composantes de la tangente en $A(\beta, -\alpha, 0)$, d'où les valeurs des composantes A, B, C :

$$\begin{cases} A_x = b\beta - ax, & A_y = -b\alpha - ay, & C_x = \beta, & C_y = -\alpha, \\ B_x = c\beta - bx, & B_y = -c\alpha - by, & D_x = x, & D_y = y, \end{cases}$$

avec

$$\alpha = -\frac{\partial y}{\partial z}, \qquad \beta = \frac{\partial x}{\partial z};$$

$$(1.1.2) \qquad a = \frac{12(EI + kl)}{l^3(4EI + kl)}, \qquad b = \frac{6(2EI + kl)}{l^2(4EI + kl)}, \qquad c = \frac{4(3EI + kl)}{l(4EI + kl)};$$

a, b et c sont les coefficients d'influence.

1.2. Choix du système d'axes

Notations

m — masse du rotor de centre de masse G encastré à l'extrémité A d'un arbre de longueur l dont on négligera ici la masse afin de simplifier les expressions,

C — centre de la section droite de l'arbre passant par G,

A — centre de la section droite passant par l'encastrement du rotor sur l'arbre,

$\vec{Cx_1}$ et $\vec{Cy_1}$ — les directions principales de la section droite et $\vec{Cz_1}$ la normale au plan de section droite.

On posera $\vec{CG} = \vec{dx_1} + \vec{eg_1}$, $\vec{CA} = \vec{nz_1}$ et l'on choisira comme coordonnées généralisées pour repèrer l'axe Cz_1, les angles „nautiques" (fig. 2).

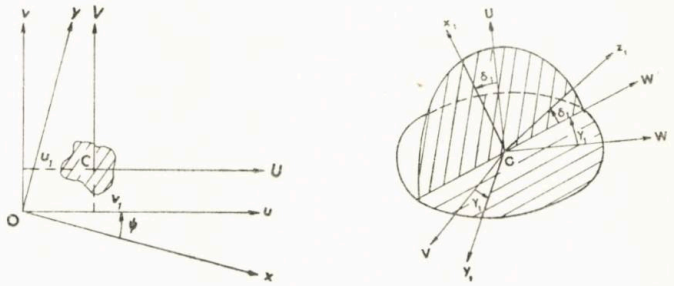


Fig. 2. — Les angles „nautiques".

Par trois rotations successives, on passe du trièdre de directions fixes $Cxyz$ au trièdre mobile $Cx_1y_1z_1$ lié au rotor

$$\vec{\Omega} = \psi^0 \vec{z} + \gamma_1^0 \vec{u} + \delta_1^0 \vec{y_1}$$

au 2ème ordre et en projection sur le trièdre $Cx_1y_1z_1$:

$$p = -\psi^0\delta_1 + \gamma_1^0, \qquad q = \gamma_1\psi^0 + \delta_1^0, \qquad r = \left(\frac{1 - \gamma_1^2 + \delta_1^2}{2}\right)\psi^0 + \delta_1\gamma^0 .$$

1.3. Énergie cinétique du rotor

Elle est donnée par :

$$\begin{aligned} 2T_2 = {} & Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq + \\ & + m\Big[[\psi^{0^2}(u_1^2 + v_1^2) + u_1^{0^2} + v_1^{0^2} + 2\psi^0(u_1v_1^0 - u_1^0v_1) - \\ & - 2re(u_1^0 - v_1\psi^0) + 2rd(v_1^0 + u_1\psi^0)\Big], \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

où A, B, C, D, E et F sont les composantes du tenseur d'inertie au point C.

1.4. Énergie de déformation de l'arbre

D'après (1.1.1) et (1.1.2), on a

$$2W = a_1(u^2 + v^2) + c_1(\gamma^2 + \delta^2) + 2b_1(v\gamma - u\delta),$$

avec

$$a_1 = aEI, \qquad b_1 = bEI, \qquad c_1 = cEI. \tag{1.4.1}$$

1.5. Équations du mouvement

Considérons les déplacements et rotations de l'arbre comme inconnus. Nous avons les relations (fig. 3) :

$$u_1 = u - n\delta, \quad v_1 = v + n\gamma, \quad \delta_1 = \delta, \quad \gamma_1 = \gamma, \quad \delta = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma = \frac{\partial v}{\partial z},$$

et au 1 er ordre l'intégrale première :

$$\vec{\Omega}.\vec{z} = \text{cste} = \psi^0 = \omega.$$

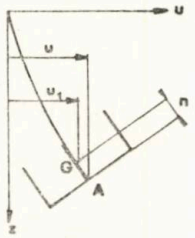


Fig. 3. — Pour établir les relations entre déplacements et rotations.

Le système différentiel du mouvement s'écrit sous forme matricielle :

$$[M_1]\{W^{00}\} + [J_1]\{W^0\} + [K_1 + K_2]\{W\} = \{E_1\}, \tag{1.5.1}$$

$$W = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & -mn \\ 0 & m & mn & 0 \\ 0 & mn & A_1 & -F \\ -mn & 0 & -F & A_1 \end{bmatrix},$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2m & -2mn & 0 \\ 2m & 0 & 0 & -2mn \\ 2mn & 0 & 0 & C-2A_1 \\ 0 & 2mn & -(C-2A_1) & 0 \end{bmatrix}\omega, \quad K_1 = \begin{bmatrix} -m & 0 & 0 & mn \\ 0 & -m & -mn & 0 \\ 0 & -mn & C-A_1 & -F \\ mn & 0 & -F & C-A_1 \end{bmatrix}\omega^2, \tag{1.5.2}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & b_1 & c_1 & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 & c_1 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} md\omega^2 \\ me\omega^2 \\ -D\omega^2 + nme\omega^2 \\ E\omega^2 - nmd\omega^2 \end{bmatrix},$$

avec $A_1 = A + mn^2$.

Lorsque les ellipsoïdes de raideur et d'inertie sont de révolution, le système différentiel correspondant à un repère fixe est plus simple. Dans le cas contraire, le système obtenu est à coefficients dépendant du temps.

1.6. Équations du mouvement par rapport à un repère fixe

Soient x et y les coordonnées de A dans le trièdre $Oxyz$ fixe.

Par trois rotations successives, on passe du trièdre de directions fixes $Axyz$ au trièdre $Ax_1y_1z_1$ lié au rotor (fig. 4) :

$$\vec{\Omega} = \alpha^0 \vec{x} + \beta^0 \vec{y} + \varphi^0 \vec{z}_1.$$

En écrivant que les deux groupes de transformation permettant de passer du trièdre $Axyz$ au $Ax_1y_1z_1$ sont identiques et en se limitant au 1er ordre, on obtient :

$$\varphi^0 + \psi^0 = \omega, \qquad [\vec{W}] = [T]\,[\vec{Z}].$$

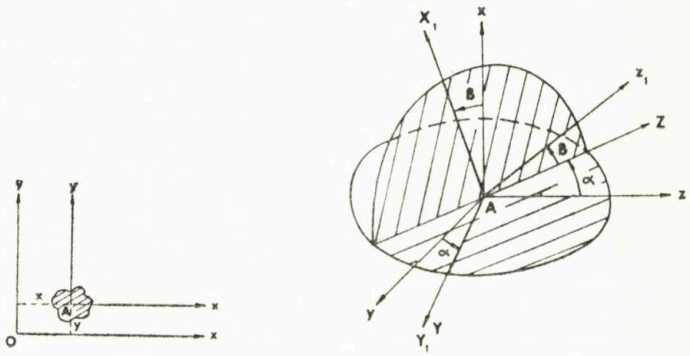


Fig. 4. — Pour passer du trièdre de directions fixes au trièdre lié au rotor.

La matrice de transformation $[T]$ est une matrice rotation :

$$T = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\omega t & \sin\omega t \\ 0 & 0 & -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}.$$

Le vecteur déplacement $\vec{Z}(x, y, \alpha, \beta)$ est régi par le système différentiel :

$$[M]\,\{Z^{00}\} + [J]\,\{Z\} + [K]\,\{Z\} = \{F_1\}, \tag{1.6.1}$$

$$Z = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & -mn \\ 0 & m & mn & 0 \\ 0 & mn & A_2 & -F_2 \\ -mn & 0 & -F_2 & B_2 \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2' & C-F_2' \\ 0 & 0 & -C-F_2' & B_2' \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & b_1 & c_1 & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 & c_1 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} m\omega^2 (d \cos \omega t - e \sin \omega t) \\ m\omega^2 (d \sin \omega t + e \cos \omega t) \\ (-D\omega^2 + mne\omega^2) \cos \omega t - (E\omega^2 - mnd\omega^2) \sin \omega t \\ (-D\omega^2 + mne\omega^2) \sin \omega t + (E\omega^2 - mnd\omega^2) \cos \omega t \end{bmatrix},$$

avec

$$A_2 = A_1 + F \sin 2\omega t, \qquad B_2 = B_1 - F \sin 2\omega t, \qquad F_2 = F \cos 2\omega t,$$

$$A_2' = \frac{dA_2}{dt}, \qquad B_2' = \frac{dB_2}{dt}, \qquad F_2' = \frac{dF_2}{dt}.$$

2. Mouvement du rotor

2.1. Rotor équilibré

Dans ce cas, on a $D = E = F = 0$ et $d = e = 0$. À partir de (1.6.1), on obtient l'équation aux pulsations propres :

$$\Delta = f_1^2(\Omega) - f_2^2(\Omega), \tag{2.1.1}$$

où

$$\begin{cases} f_1(\Omega) = (m\Omega^2 - a_1)(A_1\Omega^2 - c_1) - (mn\Omega^2 - b_1)^2, \\ f_2(\Omega) = C\omega\Omega(m\Omega^2 - a_1). \end{cases}$$

On peut représenter graphiquement les solutions du déterminant (2.1.1) (fig. 5). On a huit racines symétriques par rapport à l'origine. Les racines négatives ont une signification physique. Elles correspondent à une vitesse de précession de sens inverse de la rotation propre.

A) *Effets gyroscopiques.* Le couple $C_G = \Omega\theta(C\omega - A\Omega)$ a pour effet de dédoubler les valeurs initiales des vitesses critiques en raison du couplage introduit. La droite $\Omega = \omega$ coupe le réseau obtenu en trois ou quatre points suivant que A est inférieur ou supérieur à C (fig. 6). La courbe

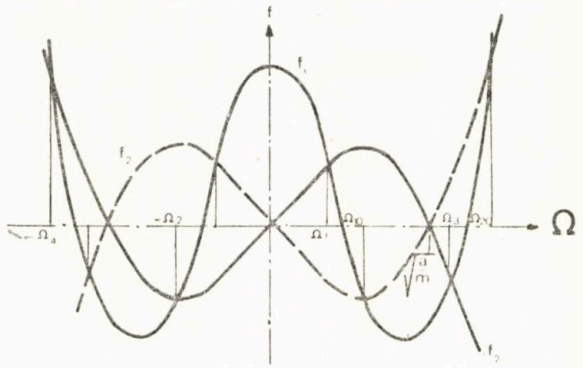


Fig. 5. — Solutions du déterminant (2.1.1).

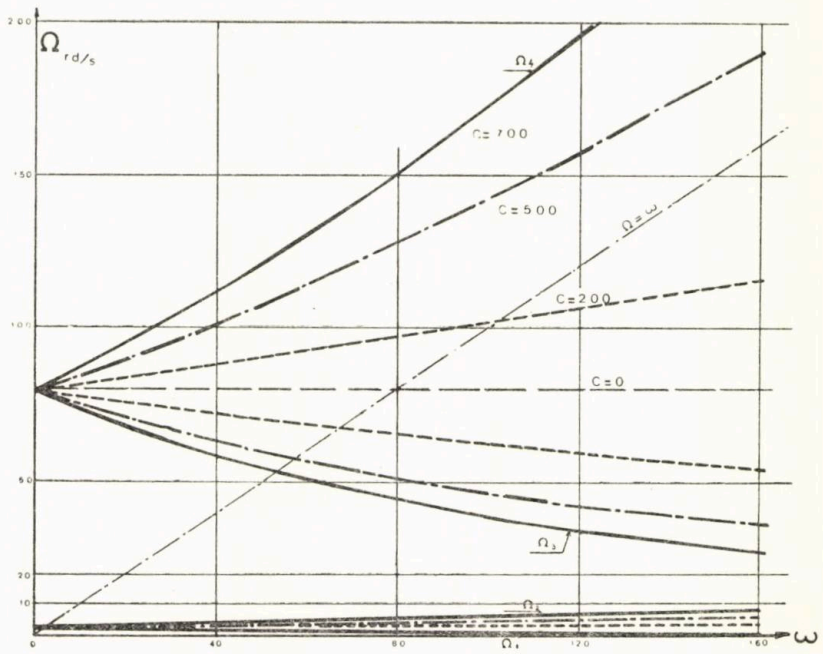


Fig. 6. — Les effets gyroscopiques : $m = 1\,800$ kg, $A = 500$ kg m²; $l = 3$m, $n = 0{,}4$ m, $I = 2.10^{-5}$ m⁴.

donnant la vitesse critique la plus élevée est asymptote à la droite $\Omega = \frac{C}{A}\omega$.

B) *Modes propres.* Lorsque le mouvement se fait selon un mode propre, il est aisé de montrer que le centre de gravité décrit un cercle à le vitesse angulaire Ω_i solution de (2.1.1). La rotation peut s'effectuer dans le même sens ou en sens inverse de la rotation propre. Un mouvement libre et la superposition de quatre mouvements circulaires.

C) *Stabilité.* Il est aisé de montrer que le système (2.1.1) n'admet pas de racines à partie réelle positive. Le système est toujours stable.

2.2. Rotor non équilibré

La recherche de solutions harmoniques du système (1.6.1) donne l'équation aux pulsations propres :

$$2.2.1) \qquad \Delta = f_1^2(\Omega) - f_2^2(\Omega) - F^2\Omega^2(\Omega - 2\omega)(\Omega + 2\omega)(m\Omega^2 - a_1)^2.$$

Seul le produit d'inertie $F\iiint xydm$ intervient dans cette expression qui est indépendante du temps.

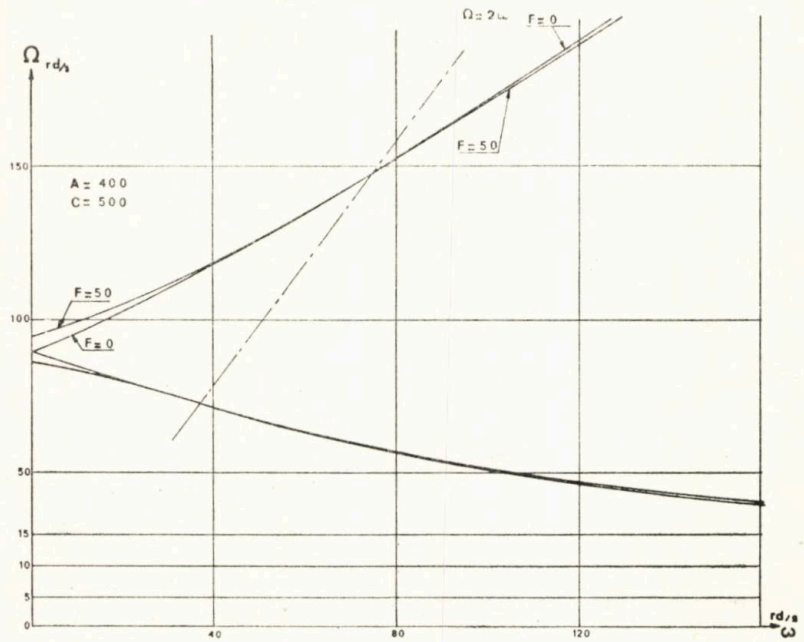


Fig. 7. — Modification des vitesses critiques : $m = 1\,800$ kg, $A = 400$ kg m², $C = 500$ kg m², $l = 3$m, $n = 0{,}4$ m, $I = 2.10^{-5}$ m⁴.

La modification apportée aux valeurs des vitesses critiques reste cependant faible (fig. 7). Les courbes obtenues sont voisines de celles du système non balourdé. La modification n'est guère sensible qu'aux très faibles vitesses. Pour une vitesse de rotation nulle, les vitesses critiques sont au nombre de quatre, les deux vitesses les plus basses étant pratiquement confondues.

La recherche d'une solution particulière de la forme $Z = \mathcal{R}e(Z_0 e^{j\omega t})$ du système (2.1.1) donne les valeurs :

$$\alpha_0 = \frac{-(rC_1\alpha + jhF_{1x})\,[sr - h^2 + \omega^2 r(C + jFe^{-2j\omega t})]}{\Delta(\omega)} \tag{2.2.2}$$

et des expressions similaires pour β_0, x_0 et y_0 où

$$F_{1x} = m\omega^2(d + je), \qquad C_{1\alpha} = -D\omega^2 + mne\omega^2 + j(E\omega^2 - mnd\omega^2),$$

$$s = A_1\Omega^2 - c_1, \qquad h = mn\omega^2 - b_1, \qquad r = m\omega^2 - a_1, \qquad sr - h^2 = f_1$$

et où $\Delta(\omega)$ est la valeur prise par l'équation (2.1.1) pour $\Omega = \omega$ (excitation par les termes de balourd) :

$$\Delta(\omega) = f_1^2 - \omega^4 r^2(C^2 - 3F^2).$$

2.3. Nombre de vitesses critiques excitées par balourd

a) *Produit d'inertie F nul.* Les expressions (2.2.1) contiennent au numérateur et au dénominateur la quantité commune

$$sr - h^2 + C\omega^2 r = f_1 + f_2 \quad (\text{pour} \quad \omega = \Omega).$$

Après simplifications, il reste au dénominateur la quantité $sr - h^2 - C\omega^2 r = f_1 - f_2$ (pour $\omega = \Omega$). Seules les vitesses critiques telles que $\omega = \Omega_2$ et Ω_4, racines du dénominateur précédent seront excitées par les termes de balourd (fig. 5).

D'autre part si $C/A < 1$, la vitesse critique supérieure Ω_4 ne coupera pas la droite $\Omega = \omega$ et Ω_4 ne sera pas excitée.

b) *Produit d'inertie F non nul.* On peut écrire α_0 sous la forme :

$$\alpha_0 = \frac{k[f_1 + \omega^2 r(C + jFe^{-2j\omega t})]}{f_1^2 - \omega^4 r^2(C^2 - 3F^2)}$$

et des expressions semblables pour β_0, x_0 et y_0.

Dans le cas général $F \ll C$, on peut alors simplifier numérateur et dénominateur par la quantité $f_1 + C\omega^2 r$ sauf au voisinage des valeurs de la vitesse angulaire qui annulent les expressions exactes placées au numérateur et au dénominateur. On aura aussi résonance pour $\omega = \Omega_1$ et Ω_3. Ces deux résonances ne seront pas dangereuses car très aigues.

2.4. Influence des différents paramètres

Lorsqu'un corps est mis en rotation autour d'un axe et dans le cas d'un mouvement à la Poinsot, le corps tend à s'orienter de telle façon que la rotation s'effectue autour des axes principaux d'inertie. La rotation est stable autour du plus grand axe et du plus petit. Dans le système pendulaire, il faut laisser agir les forces d'inertie en diminuant les forces de rappel élastique de l'arbre afin de permettre une rotation autour des axes centraux d'inertie (fig. 8 et 9). Un arbre souple permet une rotation autour d'un axe principal d'inertie (fig. 10).

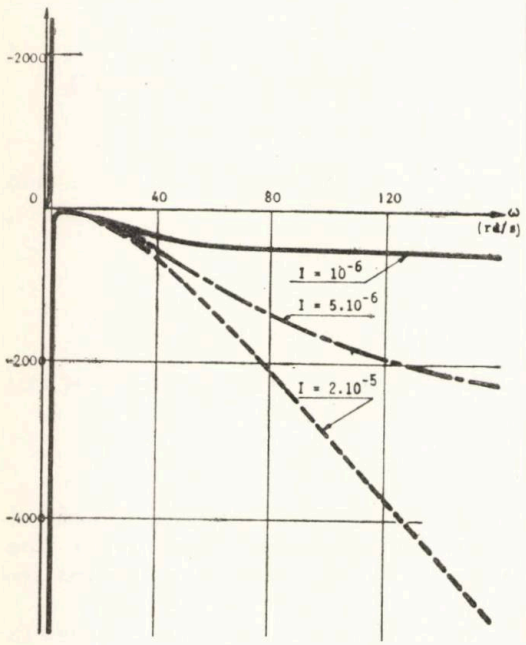


Fig. 8. — Effort à la rotule (Newton): $A=400$ kg m², $C=500$ kg m², $E=1$ kg m².

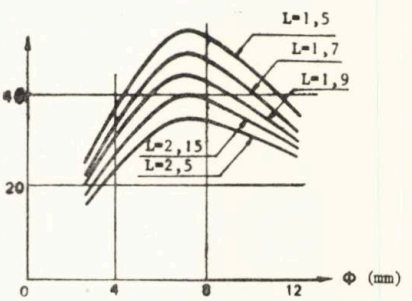


Fig. 9. — Contrainte dans l'arbre (daN/mm²).

2.5. Stabilité

Lorsque le rotor est balourdé, il est préférable de raisonner dans un système d'axes lié au rotor. On peut chercher par rapport à ces axes la position d'équilibre relatif qui à partir de l'expression (1.5.1) est donnée par

$$[K_1 + K_2]\{W\} = \{E_1\}, \qquad \{W^{00}\} = \{W^0\} = \{0\}.$$

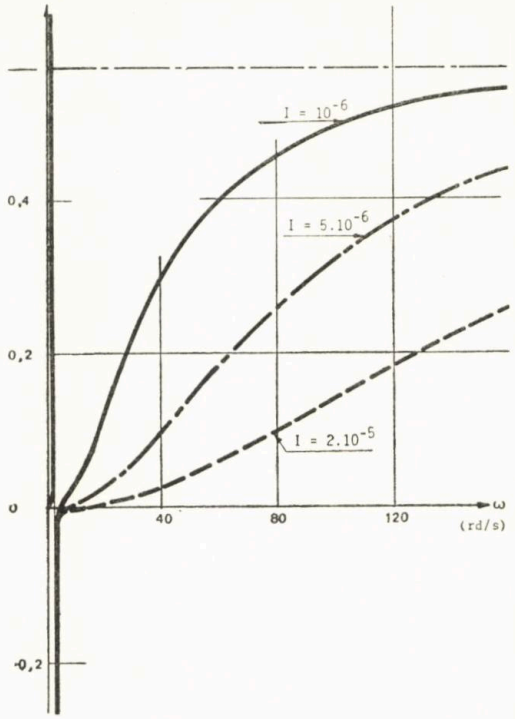


Fig. 10. — Pente à l'extrémité (degrés).

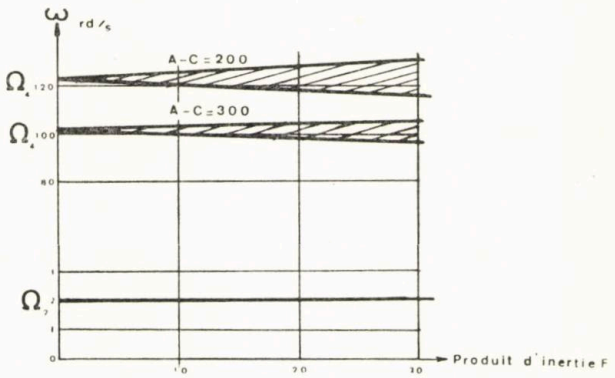


Fig. 11. — Zones d'instabilité en fonction du balourd : $A = 400\ \text{kg m}^2$, $C = 500\ \text{kg m}^2$, $E = 1\ \text{kg m}^2$.

L'instabilité se produit si le déterminant $\Delta(\omega)$ de $[K_1 + K_2]$ est négatif ou nul [1], soit :

$$\Delta(\omega) = [(a_1 - m\omega^2)((C - A_1)\omega^2 + c_1) - b_1^2]^2 - F^2\omega^4(a_1 - m\omega^2)^2 \leqslant 0;$$

1° si le produit d'inertie F est nul, il y a toujours stabilité sauf à la résonance ;

2° dans le cas général, on obtient :

a) une zone d'instabilité centrée sur la valeur $\omega = \Omega_2$ si $A < C$,

b) deux zones d'instabilité centrées sur les valeurs $\omega = \Omega_2$ et $\omega = \Omega_4$ si $A > C$. Si la zone inférieure reste toujours très étroite, la zone supérieure peut atteindre des valeurs plus importantes (fig. 11).

Dans une seconde partie sera examinée l'étude du rotor suspendu élastiquement ainsi que les solutions pratiques envisagées pour éviter les résonances parasites.

Reçue le 15 mai 1972

Université de Besançon,
Laboratoire de Mécanique Appliqué,
associé au C. N. R. S.,
Besançon, France

BIBLIOGRAPHIE

1. Pironneau Y., *Effets gyroscopiques et vitesses critiques des rotors.* Ann. de l'École Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes (1963).
2. Den Hartog J. P., *Vibrations Mécaniques,* 1960.
3. Timoshenko S., *Théorie des Vibrations,* 1954.
4. Lur'e L., *Mécanique Analytique,* 1968.

VIBRAȚIILE UNEI MAȘINI CENTRIFUGE NEECHILIBRATE

I. Rotor montat pe un arbore elastic

(Rezumat)

Se prezintă prima parte a studiului vibrațiilor unei mașini centrifuge neechilibrate, de tipul celor utilizate în industria zahărului. Se pune accentul pe determinarea cu precizie a vitezelor critice, care depind de viteza de rotație prin efect giroscopic.

Urmează că în partea a doua a lucrării să se analizeze soluțiile practice propuse pentru evitarea rezonanțelor parazite.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621

CINETOSTATICA GRUPELOR CONDUCĂTOARE CU ACȚIONARE PRIN CILINDRU-PISTON (I)

DE

CEZAR DUCA și I. SIMIONESCU

1. Introducere

Într-o lucrare precedentă [5] s-a enunțat un principiu general de formare a mecanismelor, aplicabil indiferent de alegerea parametrilor de poziție independenți (coordonate generalizate) sau de alegerea elementelor asupra cărora lucrează parametrii dinamici de echilibrare (forță sau moment).

Orice mecanism poate fi format prin legarea succesivă, la batiu, a unor grupe conducătoare și a unor grupe Assur.

Prin grupă conducătoare se înțelege un lanț cinematic cu gradul de libertate $L > 0$, *având impuse legile de variație în raport cu timpul, pentru un număr de parametri de poziție independenți egal cu gradul de libertate.*

Numărul de parametri dinamici de echilibrare, pentru fiecare grupă conducătoare, este de asemenea egal cu gradul de libertate.

În aceeași lucrare s-a realizat o sinteză structurală a grupelor conducătoare plane din familia a 3-a, cu $L_3 = 1$, $e = 1, 3, 5$ și $L_3 = 2$, $e = 2, 4, 6$.

Descompunerea mecanismelor în grupe conducătoare și Assur conduce la o analiză cinematică și cinetostatică simplă, prin aplicarea, în cazul fiecărei grupe, a procedeului specific de calcul.

În tehnică au o întrebuințare largă mecanismele cu acționare hidraulică sau pneumatică prevăzute cu cilindru mobil. În acest caz parametrul dinamic de echilibrare este forța de interacțiune dintre piston și cilindru, realizată datorită presiunii fluidului și orientată de-a lungul axei acestor elemente.

În fig. 1 se analizează două mecanisme cu acționare hidraulică, folosite în construcția unor încărcătoare, indicîndu-se grupele conducătoare și Assur componente.

În cele ce urmează se prezintă procedeele de studiu cinetostatic pentru o serie de grupe conducătoare uzuale cu acționare prin cilindru-piston, folosind metoda grafo-analitică. Aceste grupe conțin un număr de cuple

de translaţie (piston-cilindru) egal cu gradul de libertate, restul cuplelor fiind articulaţii.

Simbolizarea grupelor conducătoare este cea din lucrarea [5].

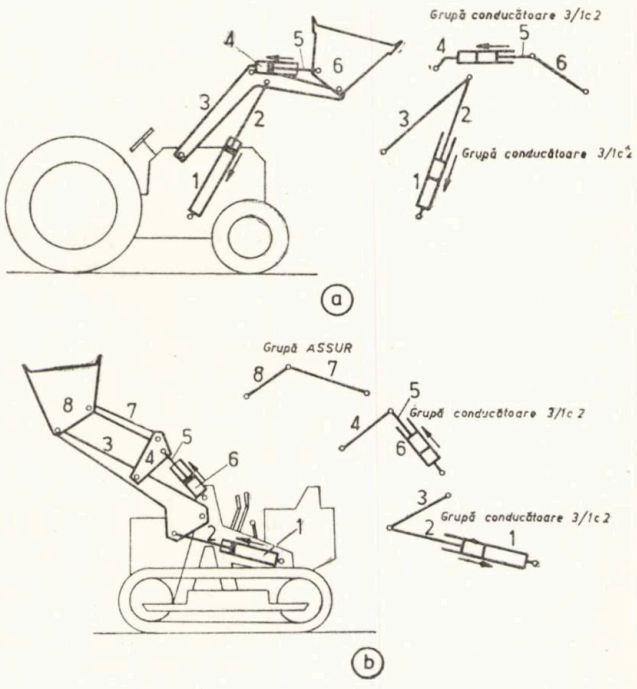


Fig. 1 — *a.* Încărcător frontal M — F 735, firma Massey-Ferguson, Coventry; *b.* încărcător frontal S — 651 I.F., Uzina mecanică Nicolina — Iaşi.

2. Grupa conducătoare 3/1 c 2 (fig. 2)

Se descompune reacţiunea $\mathbf{R}_{41}$ în două componente : $\mathbf{R}_{41}^{n}$ — paralelă cu AC şi $\mathbf{R}_{41}^{t}$ — perpendiculară pe AC. În mod analog se descompune $\mathbf{R}_{53}$ după direcţia DC ($\mathbf{R}_{53}^{n}$) şi perpendicular pe DC ($\mathbf{R}_{53}^{t}$). Componenta $\mathbf{R}_{41}^{t}$ se determină din ecuaţia de momente în raport cu punctul C, scrisă pentru elementele *1* şi *2* :

$$R_{41}^{t} = -\frac{M_C(\mathbf{F}_1) + M_1 + M_C(\mathbf{F}_2) + M_2}{L_{AC}}. \tag{1}$$

Componenta R_{53}^{t} rezultă din ecuaţia de momente în raport cu punctul C, scrisă pentru elementul *3* :

$$R_{53}^{t} = -\frac{M_C(\mathbf{F}_3) + M_3}{L_{DC}}. \tag{2}$$

Prin rezolvarea grafică (fig. 2*b*) a ecuației de echilibru a forțelor pentru întreaga grupă, rezultă $\mathbf{R}_{41}^{n}$ și $\mathbf{R}_{53}^{n}$ din

$$\mathbf{R}_{41}^{n} + \mathbf{R}_{41}^{t} + \sum_{i=1}^{3} \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_{53}^{n} + \mathbf{R}_{53}^{t} = 0. \tag{3}$$

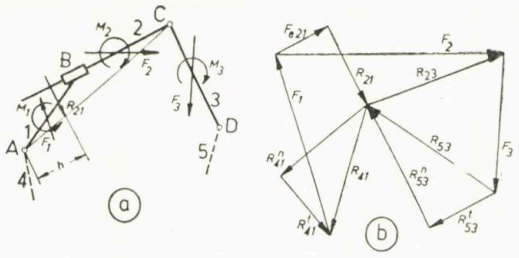


Fig. 2

Reacțiunea $\mathbf{R}_{21}$ și forța de echilibrare $\mathbf{F}_{e21}$ se determină din ecuația de echilibru a forțelor, pentru elementul *1* (fig. 2 *b*) :

$$\mathbf{R}_{41} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_{21} + \mathbf{F}_{e21} = 0. \tag{4}$$

Suportul reacțiunii $\mathbf{R}_{21}$ rezultă din ecuația de momente în raport cu *A*, pentru elementul *1* :

$$h = -\frac{M_A(\mathbf{F}_1) + M_A(\mathbf{F}_{e21}) + M_1}{R_{21}}. \tag{5}$$

În sfîrșit, ecuația de forțe pentru elementul *3* permite calculul grafic al reacțiunii $\mathbf{R}_{23}$ din

$$\mathbf{R}_{23} + \mathbf{F}_3 + \mathbf{R}_{53} = 0. \tag{6}$$

3. Grupa conducătoare 5/1 c 3 (fig. 3).

Se descompune $\mathbf{R}_{75}$ după direcția *GF* și perpendicular pe *GF*, iar $\mathbf{R}_{61}$ după *AF* și perpendicular pe *AF*. Din ecuațiile de momente în raport cu *F*, scrise pentru elementul *5* și pentru elementele *1*, *2*, *3*, *4*, rezultă

$$R_{75}^{t} = -\frac{M_F(\mathbf{F}_5) + M_5}{L_{GF}}, \tag{7}$$

$$R_{61}^{t} = -\frac{M_F(\mathbf{F}_1) + M_F(\mathbf{F}_2) + M_F(\mathbf{F}_3) + M_F(\mathbf{F}_4) + \sum_{i=1}^{4} M_i}{L_{AF}}. \tag{8}$$

Se rezolvă grafic ecuația forțelor pentru întreaga grupă, de unde se obține $\mathbf{R}_{75}^{n}$ și $\mathbf{R}_{61}^{n}$ (fig. 3 *b*) din

$$\mathbf{R}_{61}^{n} + \mathbf{R}_{61}^{t} + \sum_{i=1}^{5} \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_{75}^{n} + \mathbf{R}_{75}^{t} = 0. \tag{9}$$

Din ecuația forțelor pentru elementul *5*, rezultă R_{45} (fig. 3 *b*) din

$$\mathbf{R}_{75} + \mathbf{F}_5 + \mathbf{R}_{45} = 0. \tag{10}$$

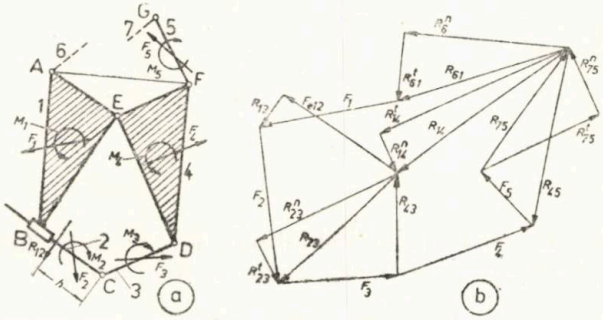


Fig. 3

Reacțiunile $\mathbf{R}_{14}$, $\mathbf{R}_{23}$ și $\mathbf{R}_{34}$ se determină în același mod ca în cazul unei diade de aspectul 1, formată din elementele *3*, *4* și cuplele *C*, *D*, *E*.

Reacțiunea $\mathbf{R}_{12}$ și forța de echilibrare $\mathbf{F}_{e12}$ se determină din ecuația de forțe pentru elementul *2* (fig. 3 *b*)

$$\mathbf{R}_{32} + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{e12} + \mathbf{R}_{12} = 0. \tag{11}$$

Suportul reacțiunii $\mathbf{R}_{12}$ rezultă prin scrierea ecuației de momente în raport cu *C*, pentru elementul *2*

$$h = -\frac{M_C(\mathbf{F}_2) + M_C(\mathbf{F}_{e12}) + M_2}{R_{12}}. \tag{12}$$

4. Grupa conducătoare 5/1 c4 (fig. 4)

Reacțiunile $\mathbf{R}_{61}$, $\mathbf{R}_{75}$ și $\mathbf{R}_{45}$ se determină în modul arătat la grupa precedentă (fig. 4 *b*), iar $\mathbf{R}_{21}$, $\mathbf{R}_{34}$ și $\mathbf{R}_{14}$ se determină la fel ca în cazul unei diade de aspectul 1, formată din elementele *1*, *4* și cuplele *B*, *E*, *D* (fig. 4 *c*).

Reacțiunea $\mathbf{R}_{32}$ și forța de echilibrare $\mathbf{F}_{e32}$ rezultă din ecuația de forțe pentru elementul *2* (fig. 4 *b*), iar suportul reacțiunii $\mathbf{R}_{32}$, din ecuația de momente în raport cu *B*, pentru același element:

$$\mathbf{R}_{12} + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{e32} + \mathbf{R}_{32} = 0, \tag{13}$$

$$h = -\frac{M_B(\mathbf{F}_2) + M_B(\mathbf{F}_{e32}) + M_2}{R_{32}}. \tag{14}$$

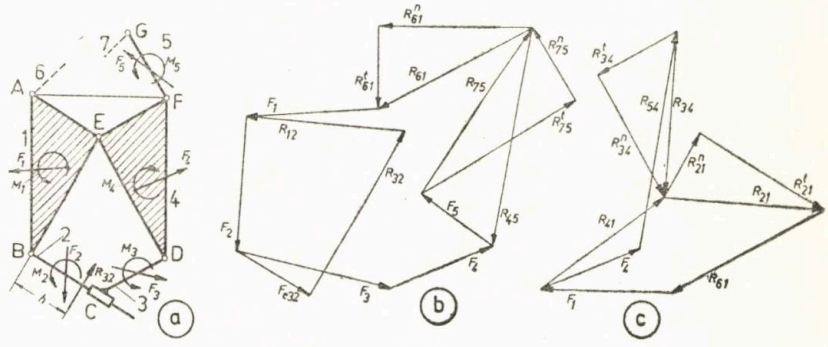


Fig. 4

5. Grupa conducătoare 5/1 c 5 (fig. 5)

Reacțiunile $\mathbf{R}_{61}$, $\mathbf{R}_{75}$ și $\mathbf{R}_{45}$ se determină în modul arătat la grupa 5/1 c 3, iar $\mathbf{R}_{32}$, $\mathbf{R}_{41}$ și $\mathbf{R}_{12}$ se determină ca în cazul unei diade de aspectul 1, formată din elementele *1*, *2* și cuplele *C*, *B*, *E* (fig. 5 *b*).

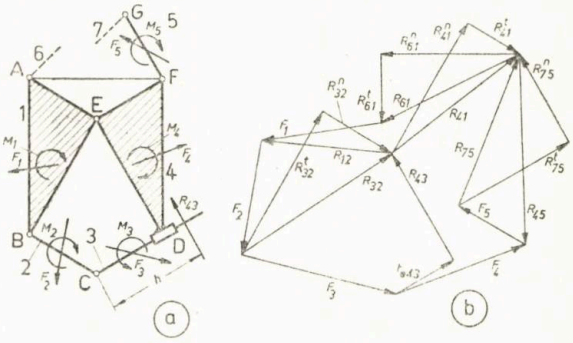


Fig. 5

Reacțiunea $\mathbf{R}_{43}$ și forța de echilibrare $\mathbf{F}_{e43}$ se obțin din ecuația de forțe pentru elementul 3 (fig. 5 *b*), iar suportul reacțiunii $\mathbf{R}_{43}$ rezultă din ecuația de momente în raport cu *C*, scrisă pentru același element:

(15) $$\mathbf{R}_{23} + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_{e43} + \mathbf{R}_{43} = 0,$$

(16) $$h = -\frac{M_C(\mathbf{F}_3) + M_C(\mathbf{F}_{e43}) + M_3}{R_{43}}.$$

6. Grupa conducătoare 5/2 c 2 (fig. 6)

Reacțiunea $\mathbf{R}_{61}$ se descompune după direcția AC și perpendicular pe AC, reacțiunea $\mathbf{R}_{74}$ se descompune după FE și perpendicular pe FE și, în sfîrșit, $\mathbf{R}_{85}$ se descompune după GD și perpendicular pe GD. Componentele tangențiale ale acestor reacțiuni se determină din ecuațiile de momente pentru elementele *1* și *2* în raport cu C, pentru elementul *4* în raport cu E și pentru elementul *5* în raport cu D:

(17) $$R'_{61} = -\frac{M_C(\mathbf{F}_1) + M_1 + M_C(\mathbf{F}_2) + M_2}{L_{AC}},$$

(18) $$R^t_{74} = -\frac{M_E(\mathbf{F}_4) + M_4}{L_{FE}},$$

(19) $$R^t_{85} = -\frac{M_D(\mathbf{F}_5) + M_5}{L_{GD}}.$$

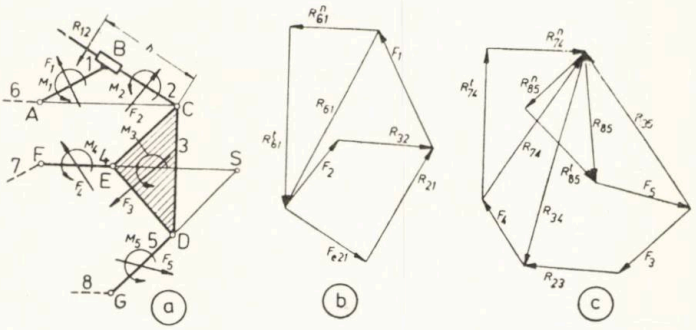


Fig. 6

Componenta normală $\mathbf{R}^n_{61}$ rezultă din ecuația de momente în raport cu punctul singular S, pentru întreaga grupă

$$R^n_{61} = -\frac{M_S(\mathbf{F}_1) + M_S(\mathbf{R}^t_{61}) + M_S(\mathbf{F}_2) + M_S(\mathbf{F}_3) + M_S(\mathbf{F}_4)}{h_{61}} -$$

(20) $$- \frac{M_S(\mathbf{R}^t_{74}) + M_S(\mathbf{F}_5) + M_S(\mathbf{R}^t_{85}) + \sum_{i=1}^{5} M_i}{h_{61}}.$$

În această relație h_{61} reprezintă lungimea perpendicularei din S pe AC.

Din ecuația forțelor pentru elementul *1* se obține reacțiunea $\mathbf{R}_{21}$ și forța de echilibrare $\mathbf{F}_{e21}$ (fig. 6 *b*)

$$\mathbf{R}_{61} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_{21} + \mathbf{F}_{e21} = 0. \tag{21}$$

Se scrie, apoi, ecuația forțelor pentru elementul *2* și se determină $\mathbf{R}_{32}$ (fig. 6 *b*) din

$$\mathbf{R}_{12} + \mathbf{F}_{e12} + \mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_{32} = 0. \tag{22}$$

Componentele $\mathbf{R}^n_{74}$ și $\mathbf{R}^n_{85}$ se calculează din ecuația forțelor, pentru elementele *3*, *4* și *5* (fig. 6 *c*)

$$\mathbf{R}^n_{74} + \mathbf{R}^t_{74} + \mathbf{R}_{23} + \sum_{i=3}^{5} \mathbf{F}_i + \mathbf{R}^n_{85} + \mathbf{R}^t_{85} = 0. \tag{23}$$

Reacțiunile $\mathbf{R}_{34}$ și $\mathbf{R}_{35}$ rezultă din ecuațiile forțelor, scrise pentru fiecare dintre elementele *4* și *5* (fig. 6 *c*)

$$\mathbf{R}_{74} + \mathbf{F}_4 + \mathbf{R}_{34} = 0, \tag{24}$$

$$\mathbf{R}_{85} + \mathbf{F}_5 + \mathbf{R}_{35} = 0. \tag{25}$$

În fine, suportul reacțiunii $\mathbf{R}_{12}$ se obține cu ajutorul ecuației de momente în raport cu punctul C, pentru elementul *2*:

$$h = -\frac{M_C(\mathbf{F}_2) + M_C(\mathbf{F}_{e12}) + M_2}{R_{12}}. \tag{26}$$

7. Grupa conducătoare 5/2 c 3 (fig. 7)

Reacțiunea $\mathbf{R}_{61}$ se descompune după direcția AB și perpendicular pe AB. Componenta $\mathbf{R}^t_{61}$ rezultă din ecuația de momente în raport cu B, pentru elementul *1*:

$$R^t_{61} = -\frac{M_B(\mathbf{F}_1) + M_1}{L_{AB}}. \tag{27}$$

Componentele $\mathbf{R}^t_{74}$ și $\mathbf{R}^t_{85}$ se definesc și se determină în același mod ca în cazul grupei tratate anterior (5/2 c 2).

Se scrie, apoi, ecuația de momente în raport cu punctul singular S, pentru întreaga grupă, din care rezultă $\mathbf{R}^n_{61}$, conform formulei (20). Aici h_{61} reprezintă lungimea perpendicularei din S pe AB.

Ecuația forțelor pentru elementul *1* permite calculul lui $\mathbf{R}_{21}$ (fig. 7 *b*):

$$\mathbf{R}_{61} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_{21} = 0. \tag{28}$$

Reacţiunea $\mathbf{R}_{32}$ şi forţa de echilibrare $\mathbf{F}_{e32}$ rezultă din ecuaţia forţelor pentru elementul *2* (fig. *7 b*)

$$\mathbf{R}_{12} + \mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_{32} + \mathbf{F}_{e32} = 0. \tag{29}$$

Componentele $\mathbf{R}^n_{74}$ şi $\mathbf{R}^n_{85}$ se determină din ecuaţia forţelor pentru elementele *3*, *4* şi *5* (fig. *7 c*)

$$\mathbf{R}^n_{74} + \mathbf{R}^t_{74} + \mathbf{R}_{23} + \mathbf{F}_{e23} + \sum_{i=3}^{5} \mathbf{F}_i + \mathbf{R}^n_{85} + \mathbf{R}^t_{85} = 0. \tag{30}$$

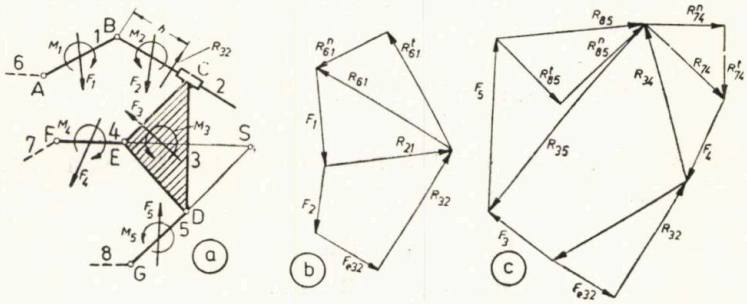


Fig. 7

Suportul reacţiunii $\mathbf{R}_{32}$ se obţine din ecuaţia de momente în raport cu punctul *B*, scrisă pentru elementul 2 :

$$h = -\frac{M_B(\mathbf{F}_2) + M_B(\mathbf{F}_{e32}) + M_2}{R_{32}}. \tag{31}$$

Reacţiunile $\mathbf{R}_{34}$ şi $\mathbf{R}_{35}$ se calculează după procedeul indicat la grupa precedentă (5/2 c 2) (fig. *7 c*).

Primită la 6 decembrie 1971

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de mecanisme şi organe de maşini,
Laboratorul de teoria mecanismelor

BIBLIOGRAFIE

1. Artobolevski I. I., *Teoria mecanismelor şi maşinilor* (trad. din l. rusă). Ed. tehn., Buc., 1955.
2. Manolescu N. I., *Sinteza numerică, structurală şi cinematică a grupelor Assur, a lanţurilor cinematice, a mecanismelor şi mecanismelor-motor plane articulate.* Teză, Buc., 1969.
3. Manolescu N. I., *Pentru adoptarea unui punct de vedere unitar în studiul analizei structurale a lanţurilor cinematice şi a mecanismelor.* St. şi cerc. de Mec. apl., Buc., 2, *28* (1969).

4. Manolescu N. I., Maroş D., *Teoria mecanismelor şi maşinilor. Cinetostatica şi dinamica.* Ed. tehn., Buc., 1958.
5. Duca C., Simionescu I., *Un principiu general de formare a mecanismelor.* St. şi cerc. de Mec. apl., Buc. (sub tipar).
6. Altschul R., Ihme W., *Getriebetechnik.* Maschinenbautechnik, *6* (1964).

THE KINETOSTATICS OF INPUT GROUPS WITH CYLINDER-PISTON DRIVE (I)

(Summary)

Means for the determination of reactions from kinematic coupling are presented for the most usual input groups with cylinder-piston drive (six input groups are considered). A graphical-analitical method is used for this purpose.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. C. 621.822.8

SPHERICAL ROLLER BEARINGS WITH SYMMETRICAL OR ASYMMETRICAL ROLLERS?[1])

BY

N. G. POPINCEANU, E. N. DIACONESCU and I. G. BERLEA

Nomenclature

d, D, B — bearing bore diameter, outside diameter and width (mm)

R_e — radius of the outer spherical raceway (mm)

R_i, r_i — principal radii of curvature of the inner raceway (R in axial plane) (mm)

R — curvature radius of the roller in axial plane) (mm)

Δ, Δ_{ci}, Δ_{ce} — maximum roller diameter and contact diameters of the rollers with raceways, respectively (mm)

l, l_{ai}, l_{ae} — full roller length ($l = 0{,}36\ B$ [9]) and effective lengths between rollers and the raceways, respectively (mm)

d_m — bearing pitch diameter (mm)

ρ — contact sphere radius between rollers and the fixed central guide flange (mm)

$2E$ — thickness of the fixed central guide flange (mm)

$\varphi_{a,s}$ — contact angle of the roller with the outer ring, given by $\varphi_{a,s} = \sin^{-1}(KB/R_e) = 9°...16°$, K being a constant depending on the series of dimensions; at the symmetrical roller bearings φ_s is in the same time the contact angle of the bearing

$\beta°$ — angle between the tangent in the contact point with the outer ring and the roller axis:

$$\beta = \tan^{-1}\frac{R}{R_e \operatorname{ctg}\varphi} - \sin^{-1}\frac{R-\Delta/2}{\sqrt{R^2+R_e^2\operatorname{ctg}\varphi}};$$

for asymmetrical roller bearings $\beta = 2° ... 4°$ and for symmetrical roller bearings $\beta = 0°$

z — number of rollers per row

$i = 2$ — number of roller rows

Q_i, Q_e — the greatest reaction between a roller and the raceways (Kgf)

Q_g — the greatest reaction between a rikker and the guide flange (Kgf)

---

[1]) Presented at the scientific session of the Polytechnic Institute of Jassy, July 2—4, 1970.

C — basic dynamic capacity of the bearing (Kgf)

C_i, C_e — basic dynamic capacity of the inner and outer ring contact respectively (Kgf)

F — equivalent radial load of the bearing (Kgf);

Y_r — radial integral [4]

Γ — reduction factor [5]

a — major half-axis of the pressure ellipse

$$\gamma = \frac{\cos\psi}{dm} \simeq \frac{\Delta}{2R_e - \Delta}$$

L, L_a, L_s, L_m — fatigue life of the rolling bearings (million revolutions)

L_{ia}, L_{is} L_{im}, L_{ea}, L_{es}, L_{em} — fatigue life of the ring contacts (million revolutions)

Subscripts

a — unmodified, asimmetrical roller bearings

s — unmodified, symmetrical roller bearings

m — modified, symmetrical roller bearings

i — inner ring

e — outer ring

1. Introduction

The double-row, spherical roller bearings may have symmetrical or asymmetrical rollers [2], [3], [9], [10]. Frequently the roller-inner raceway contact is a line contact [1], [6]; in some more recent designs this contact is modified in a crowned contact [3], [9]; so there are various variants of these bearings.

The object of this paper is to establish theoreticaly the conditions in which is preferable one or another of these variants; for that purpose the results of some experimental tests are presented.

2. Asymmetrical Roller Bearings

The geometry of the spherical bearings with asymmetrical rollers is showen in Fig. 1 (frequently $R_i = 0{,}95\ R_e$). Since $R_i = R$ and $R_e > R$, the rollers have point contact with the outer ring and line contact with the inner ring [1]. The contact with the outer ring is in the middle of the roller, where the force Q_e acts [10]; the force Q_i between the roller and the inner ring also acts in the middle of the roller. These two forces have not the same direction and therefore the force Q_g occurs [6]; the centres of curvature in axial plane, O, O_1, O_2, are not on the same straight line.

Between the forces Q_i, Q_e, Q_g there are the relations:

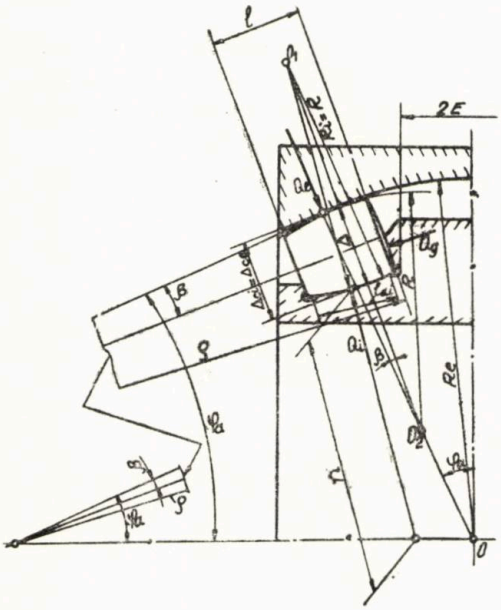
$$Q_e \simeq Q_i \sec 2\beta, \qquad Q_g \approx Q_i \tan 2\beta. \tag{1}$$

The thickness $2E$ is dependent of the force $Q_g = (0.08...0.15)Q_i$; the decrease of the contact pressure between the guide flange and the roller ends requires spherical surface which are workable with difficulty.

3. Symmetrical Roller Bearings

The geometry of these bearings is characterized by $\beta = 0$ and by the position of the maximum diameter Δ in the middle of the roller (Fig. 2). The centres of curvature in axial plane, O, O_1, O_2, are on the same straight line :

(2) $$Q_e = Q_i \quad \text{and} \quad Q_g = 0.$$



Fjg. 1. — The geometry of the modified, asymmetrical roller bearings.

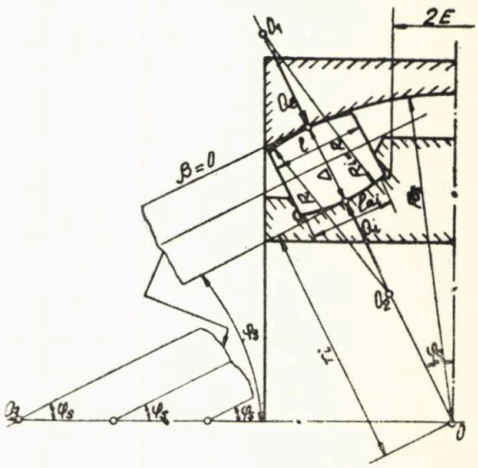


Fig. 2. — The geometry of the unmodified, symmetrical bearings.

The thickness $2E$ may be much reduced or even anulled and the spherical contact surfaces between the roller ends and the guide flange are not more necessary. An adequate decrease of the angle φ_s simultaneously with the reduction of the thickness $2E$ allows the use of longer rollers, and thus the increasing of the load-carrying capacity of the bearing. A same design, without fixed flange on the inner ring, called C design [2] (Fig. 3) has the basic dynamic capacity, reported at bearing width, higher than that of previous designs.

The inner ring and roller geometry of the symmetrical roller bearings is simpler that of the asymmetrical roller bearings and therefore their technology is more advantageous.

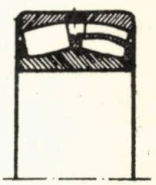


Fig. 3. — The C design bearings.

4. Modified Spherical Roller Bearings

4.1. Generals about the modification of the contact between roller and inner raceway

Among various modifying methodes of the line contact, the crowning is the most applicable in the case of the spherical roller bearings. It consists in a light differentiation of the radii R_i and R ($R < R_i$), so that, initially, between the roller and the inner raceway point contact results; for a rational use of the lenght l_{ai} it is necessary that this point should be in the middle of the roller.

If $Q < Q_{i1}$, where Q_{i1} is the force on the most loaded roller for which $2a = l_{ai}$, the contact is a point; if $Q_{i1} \leqslant Q \leqslant Q_{i2}$ where Q_{i2} is the force on the most loaded roller for which $2a = 1.5\, l_{ai}$, the contact is modified, without edge loading stresses; if $Q > Q_{i2}$ the contact becomes a line, with edge loading stresses [8].

For a correct modification of the contact on the inner raceway, it is necessary to calculate the force Q_{i2} from the relation:

$$Q_{i2} = \frac{F_2}{zY_r \cos\varphi}, \tag{3}$$

where F_2 is the maximum load that may act in practice on every rolling bearing size. In the case of the bearings with specified destination (railway vehicles, naval vessels, etc) F_2 results from operating conditions; in other cases F_2 results from the catalogue recommendations:

$$F_2 = (0.4...0.5)\, C. \tag{4}$$

The relation between R and R_i may be determined by the method used for cylindrical and taper roller bearings [8]; in this way, from the Hertz relations with point contact it results:

$$\mu = a\left[\frac{7\,700\,(\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22})}{Q_i}\right]^{1/3}, \tag{5}$$

where $\rho_{11},...,\rho_{22}$ are principal curvatures of the contacting bodies and is a elliptical integral function, a charted function of:

$$\tau = \frac{[(\rho_{11} - \rho_{12})^2 + (\rho_{21} - \rho_{22})^2 + 2(\rho_{11} - \rho_{12})(\rho_{21} - \rho_{22})\cos 2\omega]^{1/2}}{\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22}}. \tag{6}$$

At rolling bearings the angle between the principal curvature planes of the contacting bodies is zero and therefore:

$$\tau = (\rho_{11} - \rho_{12} + \rho_{21} - \rho_{22})(\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22})^{-1}. \tag{6'}$$

From Fig. 4, plotted with the charted dates, it results the following relation between μ and τ:

$$1 - \tau = 2.1\mu^{-2.63}. \tag{7}$$

If

$$a = \varkappa l_{ai}, \tag{8}$$

from (5), (6'), (7) and (8) it results the general relation between the curvatures of the contacting bodies, in the axial plane, namely:

$$\rho_{12} + \rho_{22} = 1.05\, Q_i^{0.876} (\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22})^{0.124}\, 7\,700^{-0.876} (x l_{ai})^{-2.63}. \tag{9}$$

For spherical roller bearings this relation becomes:

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_i} = 1.05\, Q_i^{0.876} \left(\frac{2}{\Delta_{ci}} + \frac{1}{R} + \frac{1}{r_i} - \frac{1}{R_i} \right)^{0.124} 7\,700^{-0.876} (x l_{ai})^{-2.63}. \tag{10}$$

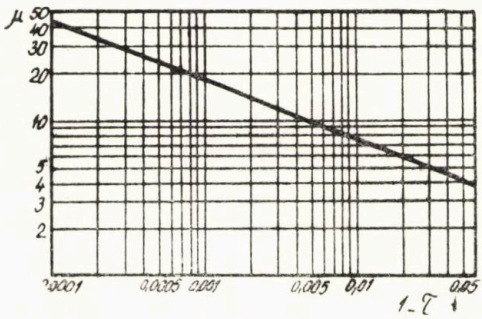


Fig. 4. — The $\mu - \tau$ correlation

Since:

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_i} < \frac{1}{300} \left(\frac{2}{\Delta_{ci}} + \frac{1}{r_i} \right), \tag{11}$$

the relation (10) may be approximated very well by:

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_i} = Q_i^{0.876} \left(\frac{2}{\Delta_{ci}} + \frac{1}{r_i} \right)^{0.124} \Big/ l_{ai}^{-2.63}\, 2\,440. \tag{12}$$

For a correct crowning $Q_i = Q_{i2}$ and $x = 0.75$; therefore the difference of the principal curvatures is:

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_i} = \frac{Q_i^{0.876}}{1\,150} \left(\frac{2}{\Delta_{ci}} + \frac{1}{r_i} \right)^{0.124} l_{ai}^{-2.63}. \tag{13}$$

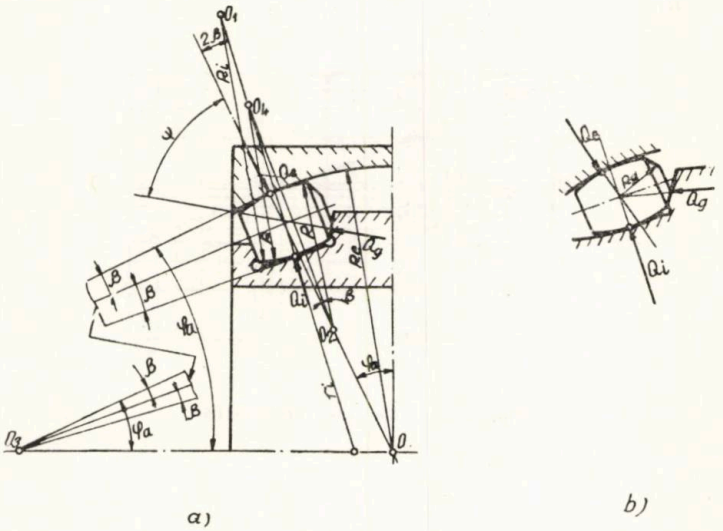
The calculus of the radii R, R_i for a crowned contact is possible if it is used also the following relation:

$$R = Y_e R_e, \tag{14}$$

where $Y_e = 0.95...0.98$ [1], [3].

4.2. Modified, asymmetrical roller bearings

The design of a modified, asymmetrical roller bearings is showed in the Fig. 5. Evidently, in this case it appears the force Q_g. To assure the correct equilibrium of the roller in the axial plane, the forces Q_i, Q_e and Q_g must be concurrent. Therefore, the contact surfaces between the rollers and the guide flange must be conical (Fig. 5*a*) or torical (Fig. 5 *b*).



a) *b)*

Fig. 5. — The geometry of a modified, asymmetrical roller bearings : *a* — rollers with conic base, *b* — roller with torical base.

In both variants the forces Q_e and Q_g, given by :

$$(15) \qquad \begin{cases} Q_e = Q_i (\cos 2\beta - \sin 2\beta \operatorname{cotan} \psi)^{-1}, \\ Q_g = Q_i \ (\operatorname{cotan} 2\beta - \operatorname{cotan} \psi)^{-1} (\sin \psi)^{-1}, \end{cases}$$

are greater then in the case of the design with unmodified contact (45°...60°). For this reason and because of the unfavourable conditions of motion of the roller upon the guide flange, characterised by great sliding and spinning, this contact has a small probability of survival in comparison with other contacts within the bearing. Considering also the complicated forms of the rollers and of the guide flange, as well as the more intensive wear of the cage as a result of its thinning, it results that in the case of the asymmetrical roller bearings, the use of the modified contact is not advantageous.

4.3. Modified, symmetrical roller bearings

The geometry of the modified, symmetrial roller bearings is showed in Fig. 6, in this case $Q_i = Q_e$, $Q_g = 0$, $\Delta_{ci} = \Delta_{ce} = \Delta$ and :

(16) $$r = \frac{(1-\gamma)}{2\gamma}.$$

The relation (9) takes the following form:

(17) $$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_i} = \frac{Q_{12}^{0.876}}{1\,054}\Delta^{-0.124}(1-\gamma)^{0.124}\, l_{ai}^{-2.63},$$

that may be utilised for the bearing design.

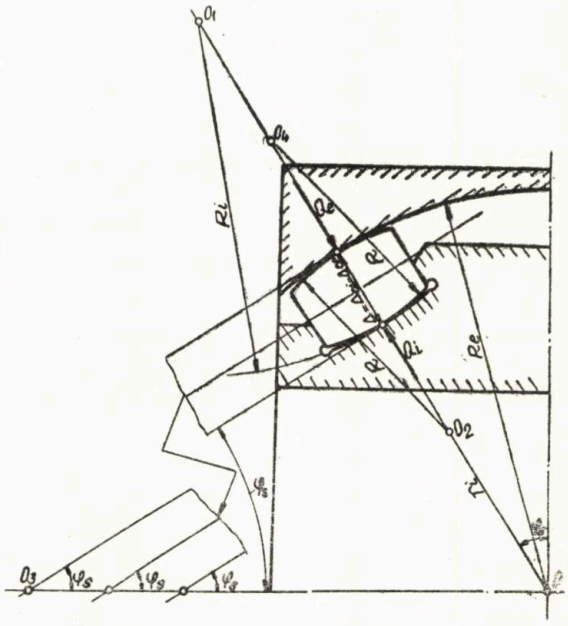


Fig. 6. — The geometry of the modified, symmetrical roller bearings.

5. Fatigue Life of the Spherical Roller Bearings

The life of the bearing can be obtained from the equation (5):

(18) $$\frac{1}{L^e} = \frac{1}{L^{e_i}} + \frac{1}{L^{e_e}}.$$

The exponents e_i, e_e, e, depend on the contact type of the rings; they are given in Table 1, where $e = \sqrt{e_1 e_2}$ in the case of line contact on one ring and point contact on the other.

Table 1

The values of the exponents e, e_i and e_e

Contact type	Point contact on both rings	Line contact on both rings	Line contact on the inner ring and point contact on the outer ring	Point contact on the inner ring and line contact on the outer ring
e_i	10/9	9/8	9/8	10/9
e_e	10/9	9/8	10/9	9/8
e	10/9	9/8	1.118	1.118

Table 2

The expressions of the basic capacities C_i and C_e

Symbol	Line contact	Point contact
	Inner ring	
C_i	$\lambda f_1 f_2 f_\varphi (il_{ai})^{7/9} Z^{3/4} \Delta_{ci}^{29/27}$	$\lambda f_1 f_2 f_\varphi \left[\frac{2R}{\Delta_{ci}} \frac{R_i}{R_i - R}\right]^{0.41} i^{0.7} Z^{2/3} \Delta_{ci}^{1.8}$
f_1	21.2	4.1
f_2	$\frac{\gamma^{2/9}(1-\gamma)^{29/27}}{1-\gamma)^{0.25}}$	$\frac{\gamma^{0.3}(1-\gamma)^{1.39}}{(1+\gamma)^{1/3}}$
f	$(\cos\varphi)^{7/9}$	$(\cos\varphi)^{0.7}$
	Outer ring	
C_e	$\lambda f_1 f_2 f_\varphi (il_{ae})^{7/9} Z^{3/4} \Delta_{ce}^{29/27}$	$\lambda f_1 f_2 f_\varphi \left[\frac{2R}{\Delta_{ce}} \frac{R_e}{R_e - R}\right]^{0.41} i^{0.7} Z^{2/3} \Delta_{ce}^{1.8}$
f_1	20.4	3.94
f_2	$\gamma^{2/9}(1+\gamma)^{29/27}(1-\gamma)^{-0.25}$	$\gamma^{0.3}(1+\gamma)^{1.39}(1-\gamma)^{-1/3}$
f	$(\cos\varphi)^{7/9}$	$(\cos\varphi)^{0.7}$

The lives of the individual rings, L_i, L_e, can be calculated from

$$L_{i,\,e} = \left(\frac{C_{i,\,e}}{F}\right)^p, \tag{19}$$

where $p = 3$ for point contact and $p = 4$ for line contact [5].

The expressions of the basic capacities C_i, C_e, are given in Table 2 [4], [5].

In the case of the spherical roller bearing, $\lambda = 0.54$ for line contact and $\lambda = 0.65$ for point contact [5].

Table 3

The definition and the expressions of the coefficients K_{La}, K_{Ls}, K_{Lm}, K_{ias} and K_{ims}

Coefficient	Defining relation	Full analytical expression	Restricted expression	Observations
K_{La}	$\dfrac{L_{ia}^{9/8}}{L_{ea}^{10/9}}$	$\dfrac{104\,\gamma^{4.1/3}(1-\gamma)^{107/18}\,l_{at}^{7/2}\,Z^{83/27}(\cos\varphi)^{7/6}}{F^{7/6}(1+\gamma)^{57/8}\,\Delta^{7/6}}$	$\dfrac{a_{La}}{F^{7/6}}$	
K_{Ls}	$\dfrac{L_{is}^{9/8}}{L_{es}^{10/9}}$	$\dfrac{104\,\gamma^{4.1/3}(1-\gamma)^{107/18}\,l_{ats}^{7/2}\,Z^{83/72}(\cos\varphi)^{7/6}}{F^{7/6}(1+\gamma)^{57/8}\,\Delta^{7/6}}$	$\dfrac{a_{Ls}}{F^{7/6}}$	
K_{Lm}	$\left(\dfrac{L_{im}}{L_{em}}\right)^{10/9}$	$1{,}139\left(\dfrac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^{5.743}\left(\dfrac{1-Y_e}{1-Y_i}\right)^{1.367}$		valid for $F \leqslant F_2$
K_{ias}	$\left(\dfrac{L_{ia}}{L_{is}}\right)^{9/8}$	$\left(\dfrac{l_{ata}}{l_{ais}}\right)^{7/2}\left(\dfrac{\cos\varphi_a}{\cos\varphi_s}\right)^{7/2}$		
K_{ims}	$\dfrac{L_{im}}{L_{is}^{1.00616}}$	$256\,\dfrac{F^{1.2465}}{F_2^{1.0775}}\,Z^{0.059}\,l_{ais}^{0.1406}$	$a_{ims}\,\dfrac{F^{1.2464}}{F_2{}^{1.0775}}$	valid for $F \leqslant F_2$

To compare the lives of such bearing designs (unmodified) symmetrical and asymmetrical bearings) it is necessary to introduce some coefficients : K_{Ls}, K_{Lm}, K_{La}, K_{ias}, K_{ims}; they are defined and calculated in Table 3.

From the relations (18) and the Table 3, it results the following expressions of the fatigue life ratios :

$$\frac{L_s}{L_a} = \left[\frac{1+K_{La}}{K_{ias}\,(1+K_{Ls})}\right]^{0.8944} = \left[\frac{a_{La}+F^{7/6}}{K_{ias}\,(a_{Ls}+F^{7/6})}\right]^{0.8944}. \tag{20}$$

In K_{ims} expression it is assumed, with very small error, that :

$$\frac{\gamma^{0.00564}(1+\gamma)^{0.00616}(\cos\varphi)^{0.047}}{(1-\gamma)^{0.00029}\,\Delta^{0.00026}} = 1,$$

$$(21)\qquad \frac{L_m}{L_s} = \frac{K_{ims}(1+K_{La})^{0.8944}}{K_{ias}^{0.8944}(1+K_{Lm})^{0.9}} = \frac{a_{ims}(a_{La}+F^{7/6})^{0.8944}}{K_{ias}^{0.8944}(1+K_{Lm})^{0.9}F^{0.01882}F_2^{1.0775}},$$

$$(22)\qquad \frac{L_m}{L_s} = \frac{K_{tms}(1+K_{La})^{0.8944}}{K_{ias}^{0.8944}(1+K_{Lm})^{0.9}} = \frac{a_{ims}(a_{La}+F^{7/6})^{0.8944}}{K_{ias}^{0.8944}(1+K_{Lm})^{0.9}F^{0.01882}F_2^{1.0775}}.$$

These life ratios increases with the bearing load F and are equal to 1 for a certain load, $F = F_{cr}$, called critical load.

So, for the ratio L_s/L_a, F_{cr} is

$$(23)\qquad F_{cr} = \left[\frac{a_{ea} - K_{ias}\,a_{Ls}}{K_{ias}-1}\right]^{6/7};$$

for the ratio L_m/L_s, F_{cr} results from equation

$$(24)\qquad \frac{a_{ims}(F_{cr}^{7/6}+a_{Ls})^{0.8944}}{(1+K_{Lm})^{0.9}F_{cr}^{0.01882}F_2^{1.0775}} = 1$$

and for the ratio L_m/L_a, F_{cr} results from equation

$$(25)\qquad \frac{a_{ims}(F_{cr}^{7/6}+a_{La})^{0.8944}}{K_{ias}^{0.8944}(1+K_{Lm})^{0.9}F_{cr}^{0.01882}F_2^{1.0775}} = 1.$$

For $F \neq F_{cr}$ the fatigue life ratios differ from 1 and depending on their values becomes advantageous one or another design (Table 4).

Table 4

The variation of the fatigue life ratios with the load

Value of the load F	Comparaison of the fatigue lives		
	L_s with L_a	L_m with L_s	L_m with L_a
$F < F_{cr}$	$L_s < L_a$	$L_m < L_s$	$L_m < L_a$
$F = F_{cr}$	$L_s = L_a$	$L_m = L_s$	$L_m = L_a$
$F > F_{cr}$	$L_s > L_a$	$L_m > L_s$	$L_m > L_a$

In the Fig. 7 is given the variation of the ratios L_s/L_a, L_m/L_a and L_m/L_s with the load, for 22 318 roller bearings, calculated from (20)...(22), using the following values :

$\gamma = 0.1867$, $l_{aia} = 19.1$ mm, $l_{ais} = 19.6$ mm, $l_{ae} = 20.5$ mm,
$\Delta = 27$ mm, $z = 14$, $\varphi_a = 14°15'$, $\varphi_s = 13°30'$, $Y_e = 0.96$,
$R_e = 85.8$ mm, $F_2 = 0.5$, $C = 15\,500$ Kgf.

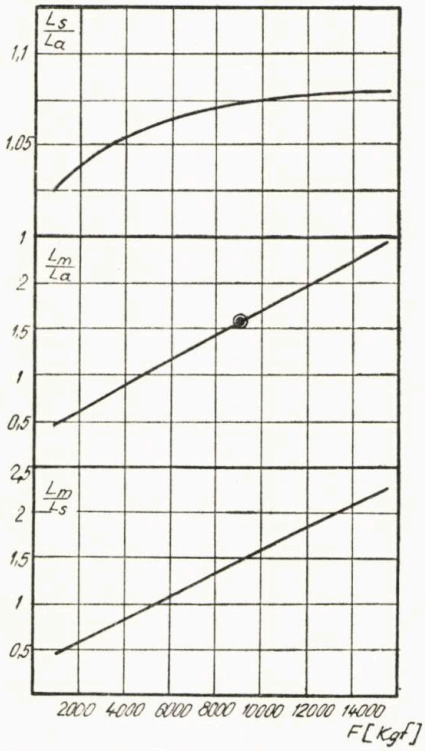


Fig. 7. — The variation of the fatigue life ratios for 22 318 bearings.

It results that in order to compare the fatigue life of the three bearing designs, it is necessary to specify the bearing load.

The maximum life gain appears by the modification of the contact where $F = F_2$; therefore the crowning is advantageous for the rolling bearings that work under constant load or under load with small variations.

6. Experimental tests

In order to confirm these theroretical results, 6 test series of 20 bearings of size 22 318 each (3 test series of unmodified, asymmetrical bearings and 3 test series of modified according to the upper dates, symmetrical bearings) have been life tested under constant load $F = 9\,000$ Kgf, at speed $n = 1\,000$ rot/min, temperature $t = 75...80°C$, lubrificated with K38 Oil. Test bearings were made in F. R. B. [2]). The test were carried out in ten F. R. B. type machines with four work-posts each. The rapid test method has been used, the tests being ended after a significant number of bearing failures [7] and the results interpreted from W e i b u l l plots to provide the fatigue life in conventional values L, the deterioration probability P and the exponent of dispersion e, according to [11].

The experimental results are plotted in Fig. 8 and 9 and synthetised in Table 5.

Table 5

Life indices of the tested bearings

Series	Series results			Medium results			Observations
	L_{10}	L_{30}	e	L_{10}	L_{30}	e	
1	445	785	3.400	434	717	4.670	symmetrical rollers
2	453	850	2.990				
3	403	515	7.630				
4	290	640	2.445				assymmetrical rollers
5	290	510	3.375	277	510	3.550	
6	250	380	4.830				

From Table 5 it results that the ratio L_{10m}/L_{10a} has the value 1.565; the theoretical value of the same ratio, according to relation (22), for $F = 9\,000$ Kgf, is :

$$\frac{L_{10m}}{L_{10a}} = 1.555, \tag{22'}$$

in good agreement with the experimental value.

7. Conclusions

From this paper it results that :

1. The symmetrical roller bearings have a simpler geometry and consequently a more advantageous technology.

2. The modification of the contact on the inner ring is advantageous for symmetrical roller bearings only ; for asymmetrical roller bearings it

2) F. R. B. — Rolling Bearings Works, Bîrlad, Roumania.

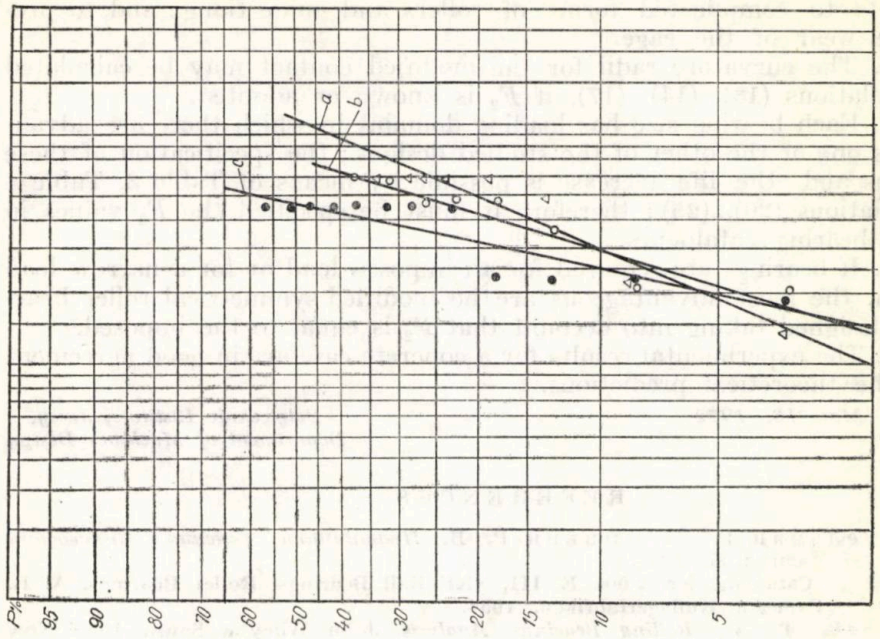


Fig. 9. — The life results for the unmodified, asymmetrical roller bearings: *a* — series 4, *b* — series 5, *c* — series 6.

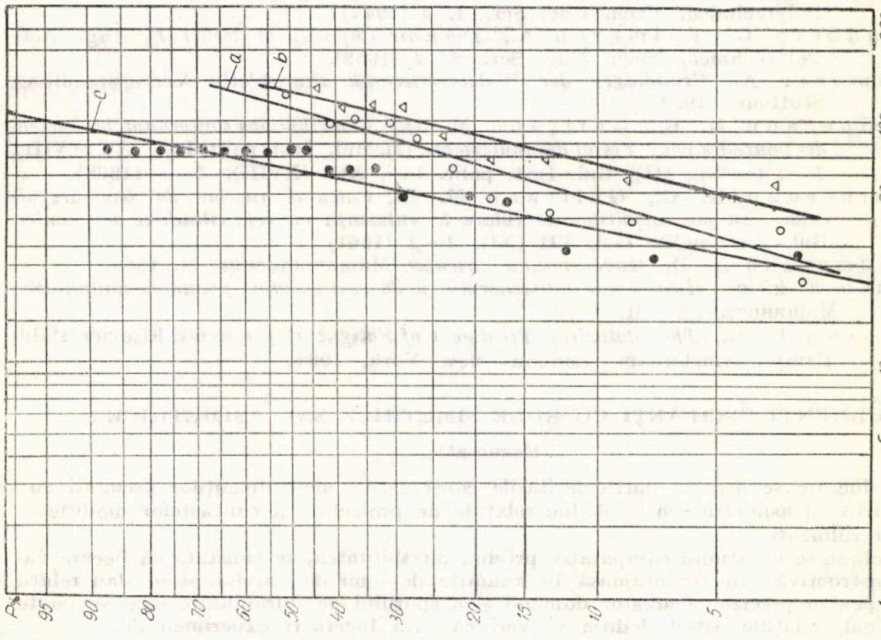


Fig. 8. — The life results for the modified, symmetrical roller bearings: *a* — series 1, *b* — series 2, *c* — series 3.

conducts to complicated forms of rollers and guide flange and to premature wear of the cage.

3. The curvature radii for the modified contact may be calculated with relations (13), (14), (17), if F_2 is known or adopted.

4. Each bearing size has loading domains in which there are advantageous one or the other of the studied designs; the specification of these domains and the life increase is possible by means of Table 3, Table 4 and relations (20)...(25); therefore it must be specified the F_2 values in rolling bearing catalogues.

5. If bearings are required for an imposed load or for a narrow load domain, the most advantageous are the modified symmetrical roller bearings, designed taking into account that F_2 is equal to the imposed.

6. The experimental results for a concrete case are in good agreement with the theoretical predictions.

Received May 18, 1972

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Machines Design

REFERENCES

1. Беизельман Р. Д., Цыпкин Р. В., *Подшипники качения. Справочник* Машгиз, М., 1954.
2. * * * Catalogue Nr. 2 000 E. III, SKF Ball Bearings, Roller Bearings, A. B. Svenska Kullagerfabriken, 1954.
3. Harris T. A., *Rolling Bearings Analysis.* John Wiley & Sons., Inc., New York—London—Sidney, 1966.
4. Lundberg G., Palmgren A., *Dynamic Capacity of Rolling Bearings.* Acta Polytechnica, Mech. Eng. Ser., I, *3* (1947).
5. Lundberg G., Palmgren A., *Dynamic Capacity of Roller Bearings.* Acta Polytechnica, Mech. Eng. Ser., 2, *4* (1952).
6. Palmgren A., *Grundlagen der Walzlagertechnik.* Franch'sche Verlagshandlung, Stuttgart, 1954.
7. Popinceanu N. G., Gafiţanu M. D., *Contributions concernant les méthodes nouvelles pour l'essai des roulements.* (I), Bul. Inst. polit. Iaşi, XIV (XVIII), *1—2* (1968); (II), Bul. Inst. polit. Iaşi, XIV (XVIII), *3—4* (1968).
8. Popinceanu N. G., Gafiţanu M. D., *Calculul razelor de bombare ale căilor sau ale corpurilor de rulare la rulmenţii cu role cilindrice sau conice.* Bul. Inst. polit. Iaşi, VII (XI), *1—2* (1961).
9. Спришевски А. И., *Подшипники качения.* Машиностоение, М., 1969.
10. Зыков Е и. с., *Повышение надехности и долговечности роликоподшипников.* Машиностоение, М., 1969.
11. Johnson L. G., *The Statistical Treatment of Fatigue Experiments.* Elsevier Publ. Comp., Amsterdam—London—New York, 1964.

RULMENŢI OSCILANŢI CU ROLE SIMETRICE SAU ASIMETRICE ?

(Rezumat)

În lucrare se discută particularităţile constructive ale rulmenţilor oscilanţi cu role simetrice şi asimetrice şi se deduc relaţiile de proiectare a contactelor modificate din aceşti rulmenţi.

Făcîndu-se un studiu comparativ privind durabilitatea, se constată că fiecare variantă constructivă este avantajoasă în anumite domenii de sarcină şi se dau relaţii de calcul pentru precizarea acestor domenii şi a sporului de durabilitate care se poate obţine. Final, relaţiile astfel deduse se verifică prin încercări experimentale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. C. 621.822

CONSIDERATIONS ON THE LIFE DISPERSION OF BEARING TESTS [1])

BY

M. D. GAFIȚANU and L. T. HOSTIUC

1. Introduction

The understanding and analysis of life dispersion of bearings that have operated under identical conditions are important from at least, two points of view :

a) the total operating life of a group of bearings may vary in a close dependence with the dispersion and the correlation of this total life with only one of the durability caracteristics (L_{10}, L_{30}, L_{50}) proves to be unsatisfactory ;

b) dispersion, on the basis of P a l m g r e n's considerations [5], [6], does not act independently but closely connected to the functional dependencies among life, critical stress, depth of critical stress occuring and the possibility of failure phenomena appearance.

The above mentioned facts underline the practical and theoretical efficiency of studies that have been carried out as for by numerous researches [1]...[4]. This papert is trying to bring some supplementary contributions.

2. Dispersion Characteristics

For identical testing or operating conditions, the dispersion of the lives of bearings in a group is closely connected with the nonuniformity degree of the bearing production and associated with a dynamic capacity (C, C_{30} or C_{50}) or with life characteristics L_{10}, L_{30}, L_{50} corresponding to it, is a production quality index.

---

[1]) Presented at the scientific session of the Polytechnic Institute of Jassy, July 2—4, 1970.

For bearing tests there are recommended the following characteristics in order to estimate the dispersion.

2.1. Dispersion exponent (e)

The Weibull type equation [8] is adopted for the dependence between life L and failure probability P:

$$P = 1 - \exp[-AL^e], \tag{1}$$

where A is a constant and e — dispersion exponent.

2.2. Ratio of lives

1. The ratio between the bearing group average life and the life L_{10}, corresponding to the failure probability $P = 0.1$:

$$m_m = \frac{\sum_1^n L_i}{nL_{10}}, \tag{2}$$

where n is the number of bearing taken into consideration under identical testing and functioning conditions.

2. The ratio between the life L_{30} corresponding to the probability $P = 0.3$ and the life L_{10}:

$$m_{30} = \frac{L_{30}}{L_{10}}. \tag{3}$$

3. The ratio between the L_{50} life corresponding to $P = 0{,}5$ probability and the L_{10} life:

$$m_{50} = \frac{L_{50}}{L_{10}}. \tag{4}$$

4. The ratio between the highest life L_{100} corresponding to the $P = 1$ probability and the lowest life $L_{1/n}$ corresponding to the $P = 1/n$ failure probability:

$$m_{100} = \frac{L_{100}}{L_{1/n}}. \tag{5}$$

The dispersion estimated by means of life ratios may be applied without taking into consideration the Weibull type theoretic distribution.

But if we accept the Weibull's distribution validity, in concordance with the experimental results reached at, there are some connec-

tions between the dispersion characteristics m_m, m_{30}, m_{50} and e, as plotted in Fig. 1. The dispersion characteristic m_m depends greatly on the number of bearings in the bearing group ; it is of an informative importance.

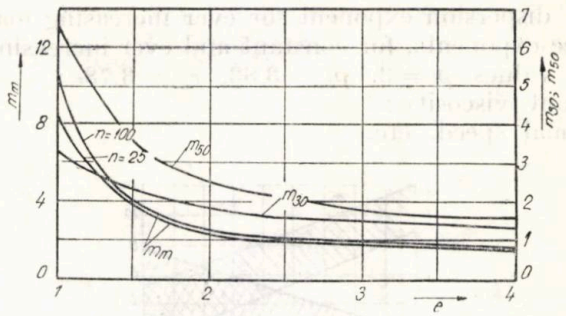


Fig. 1. — The correlation between m_m, m_{30}, m_{50} and the dispersion characteristics e.

3. Bearing Total Operating Life Duration

Under these operating conditions, where each bearing replacing is a consequence of his failure, the total life of the bearing group is of an outstanding economic importance.

Out of equation (2) there follows, for the total life of a bearing group of n bearings

$$(6) \qquad \sum_1^n L_i = L_{10} \frac{1}{\lg\,(1/0.9)^{1/e}} \sum_1^n \lg\left(\frac{1}{1-P_i}\right)^{1/e} = m_m\, L_{10}\, n.$$

Thus, equation (6) points out the necessity of accompanying a life characteristic with a dispersion one in order to define the total life of a bearing group.

4. Factors Influencing the Dispersion

In assessing the bearing basic dynamic capacity for standard functioning conditions, the dispersion exponent is considered to be constant with the values $e = 10/3$ and $e = 9/8$, for the initial point contact and the initial line contact respectively [5]. With the bearing steels currently used, the dispersion exponent may take the values $e = (1.1...1.5)$ [6].

But practically life dispersion depends on :

a) improving of bearing quality (Fig. 2) that with time leads an increasing of the dispersion exponent (though we could speak of an improvement only if the exponent e increasing is accompanied by a corresponding increasing of life characteristics) ;

b) testing or operating conditions ; out of these we may mention here :

c) load variation ; an ever-increasing head brings about alterations of the exponent e :

$$e_k = ep\,(p_k + 1)\,p_k, \tag{7}$$

where e_k is the dispersion exponent for ever increasing load ; p, p_k — life-load dependence exponents, for constant and ever increasing load, respectively. For the values $p = 3$, $p_k = 3.83$, $e_k = 3.78e$;

d) lubricant viscosity ;

e) rotational speed, etc.

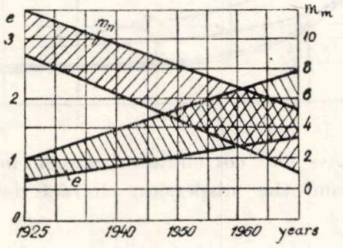


Fig. 2. — Alterations of some of the dispersion characteristics with time [1], [7].

In connection with the above mentioned influences we may show here the results reached at by testing 900 radial ball bearings 6 308 with a normal precision, in the laboratories of the F. R. B. Industries Bîrlad and of the Department of Machine Design, Polytechnic Institute of Jassy (Table 2, Fig. 3).

As such, the dispersion exponent manifests a tendency towards when the rotational speed increases ; there are also to be noticed a sensible variation in correlation with the lubricant viscosity when the external circuit lubricating system remains the same.

As there are marked interdependences between the above mentioned testing conditions and life, the interest of the dispersion analysis is obvious to be mentioned [6].

From [6] there also follows that :

$$p = \frac{c - h + 2e}{3e}, \tag{8}$$

where p is the dependence exponent between life and equivalent load applied to the bearing, c — dependence exponent between $\ln [1/(1 - P)]$ and the critical shear stress, h—dependence exponent between $\ln [1/(1-P)]$ and the depth at which the critical shear stresses occur.

It is sure that according to the relations (8) the dispersion exponents c, h, p are connected, with consequences that ask for further precise delimitation when calculating the dynamic capacity and for the rational bearing design.

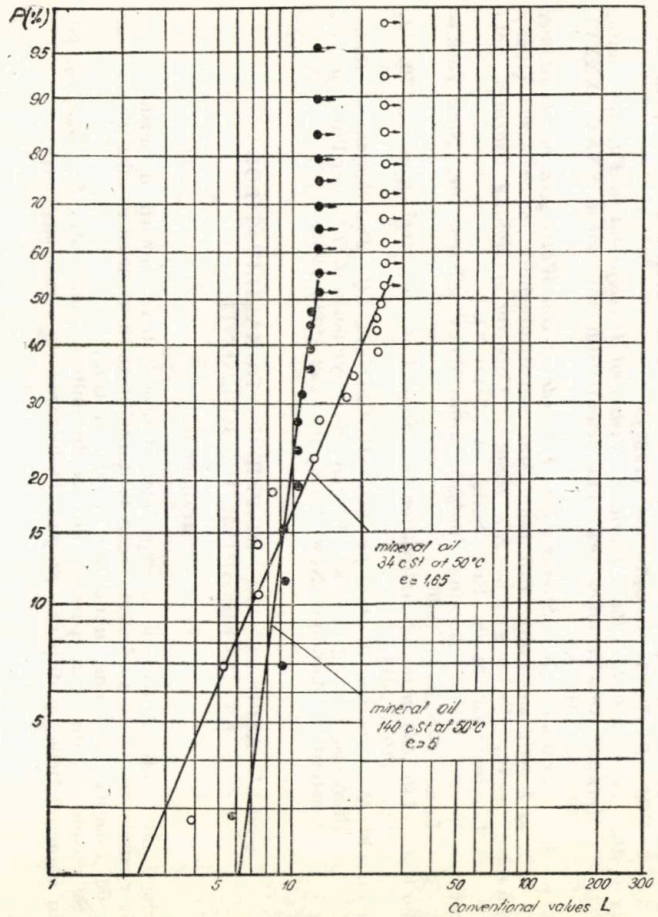


Fig. 3.—Experimental data for two 6 308 bearing groups (lubrication with mineral oil, radial last $F = 15\,000$ N, 1 500 r. p. m.). Example.

Table 1

Dispersion exponent variation in dependence on testing conditions (rotational speed and lubricant viscosity)

Symbol bearing group *)	Load N	Rotation speed r.p.m.	Viscosity test conditions CP	Dispersion exponent e
7 601	15 000	750	108	2,3
8 526 8 951 8 979 8 009		1 500	126	1.8 2.0 1.65 1.3
876 8 901		2 600	90	2.2 1.0
8 513 8 560		3 500	117	1.65 1.95
7 401 7 346		750	270	4.0 4.0
7 076 7 126		1 500	324	2.05 2.05
7 151 7 201		2 600	252	2.1 2.0
7 301 7 251		3 500	153	1.9 1.5
8 026 9 001		1 500	720	5.0 5.0
9 026 9 051		2 600	495	2.8 1.9

*) 25 bearings in each group.

5. Conclusions

1. A complete definition of bearing life needs besides a knowledge of life characteristics, the finding out and underlining of a dispersion characteristic.

2. Both the L life and dispersion characteristics may be pointed out by experimental tests of bearings.

3. Total life of a bearing group under identical conditions depends on dispersion.

4. The results of the tests that have been carried out and mentioned in the paper, show that operating conditions have an influence upon bearing dispersion.

5. Between dispersion and exponents in equation (8) there exist some correlations whose understanding is absolutely necessary for the rational bearing design.

Received March 2, 1972

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Machine Design

REFERENCES

1. Popinceanu N. G., Gafiţanu M. D., *Contributions concernant les méthodes nouvelles pour l'essai des roulements* (I). Bul. Inst. polit. Iaşi, XIII (XVII), *1—2*, 443—454 (1967).
2. Popinceanu N. G., Gafiţanu M. D., *Contributions concernant les méthodes nouvelles pour l'essai des roulements* (II), (III). Bul. Inst. polit. Iaşi, XIII (XVII), *3—4*, 445—454 (1967).
3. Biro B., *Time Reduction the Endurance Tests and Development in Fatigue Testing Machines.* Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, XXXV—XXXVI, 339—346 (1961).
4. Biro B., Parducz N., *Strerung der Lebensdauer von Wälzlagern bei konstanter und stetig steigender Belastung.* Maschinenbautechnik, *6*, 321—324 (1965).
5. Lundberg G., Palmgren A., *Dynamic Capacity of Rolling Bearings.* Acta Polytechnica, Mech. Eng. Series, **1**, *3* (1947).
6. Harris T. A., *Rolling Bearing Analysis.* John Wiley & Sons, Inc., New York—London—Sidney, 1966.
7. Root L., *Life Dispersion of Antifriction Bearings.* Iron and Steel Enging., **30**, *11*, 113—119 (1961).
8. Weibull W., *Efficient Methods for Estimating Fatigue Life Distributions of Roller Bearings.* Rolling Contact Phenomena—Symposium. Elsevier Publ. House., Amsterdam—London—New York, pp. 252—266, 1962.

UNELE ASPECTE ALE DISPERSIEI DURABILITĂŢILOR LA ÎNCERCĂRILE DE RULMENŢI

(Rezumat)

Se fundamentează teoretic şi experimental necesitatea studierii dispersiei durabilităţilor rulmenţilor care au fost încercaţi la durabilitate în aceleaşi condiţii de sarcină, viteză de rotaţie, lubrifiant, umiditate şi temperatură.

Se recomandă însoţirea parametrilor de durabilitate cunoscuţi: L_{10}, L_{30}, L_{50} cu una din caracteristicile de dispersie propuse în lucrare: m_m, m_{30}, m_{50}, m_{100}.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D K. 624.072.2; 530 17

UNTERSUCHUNG DER TORSIONSPANNUNGSVERTEILUNG BEI DEN KREISABSCHNITTFÖRMIGEN STÄBE DURCH DIE METHODE DER ELEKTRISCHEN ANALOGIE [1])

VON

VICTOR BAUŞIC, D. HORBANIUC, IULIAN MIROŞ, COSTACHI GIRIADĂ und VALERIAN PALIHOVICI

In der vorstehenden Arbeit bestimmen die Verfasser experimentell die Verteilung der Torsionspannungen längs des Querschnittskonturs einiger Kreisabschnittförmigen Stäbe mit verschiedenen Winkeln im Zentrum, die der Drillung unterworfen sind.

Es wirde eine Anzahl von 7 Querschnitten untersucht mit dem Winkel im Zentrum, indem er von 30 in 30 Grade variierte beginnend mit 90 bis 270 Grade.

Die Bestimmung der Torsionspannungsgrösse wurde auf Grund der elektrischen Analogie [1] durchgeführt, indem man ein mit Gleichstrom gespeistes Widerstandsnetz verwendete, welches die Lösung der Differentialgleichungen vom Typ

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = -2G0 \tag{1}$$

zulässt.

Der Aufbau des Netzes und die Arbeits methode wurden in der Ausarbeitung einer ähnlichen Arbeit verwendet [2].

Die in den Netzknoten gemessenen Spannungswerte für jeden studierten Querschnitt sind in den Abb. 1...7 gegeben.

Auf Grund dieser Werte wurden die Querschnitte in der Oberfläche des Spannungsfunktion, die in den Abb. 8...14 dargestellt sind, aufgezeichnet.

---

[1]) Mitgeteilt an der wissenschaftlichen Tagung des Technisches Hochschule von Jassy, an 28.—30. September 1967.

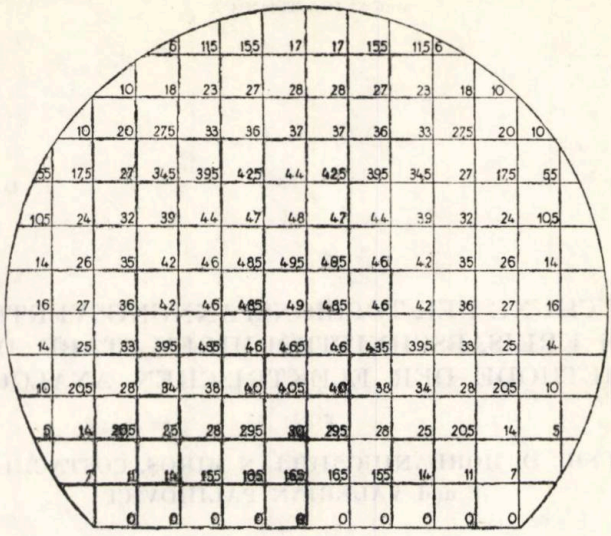


Fig. 1

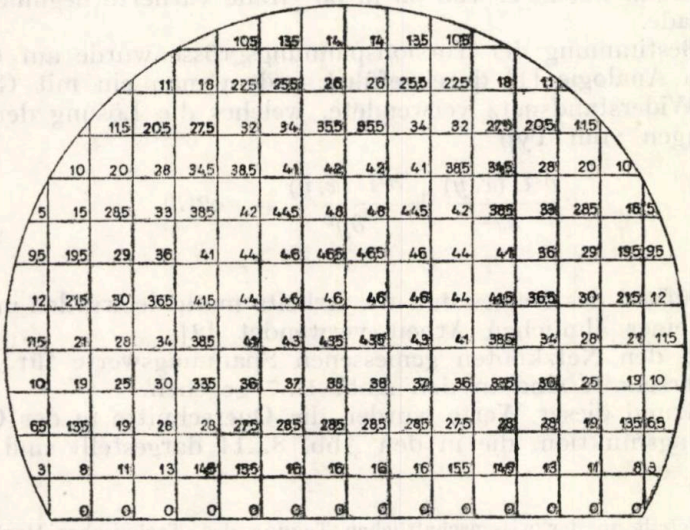


Fig. 2

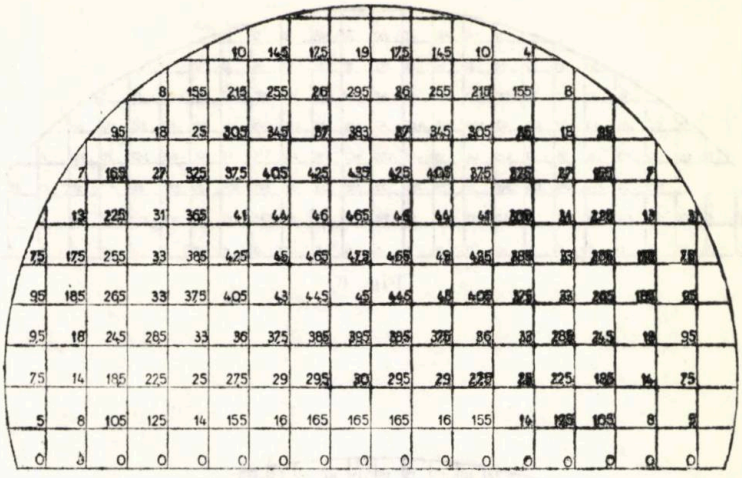


Fig. 3

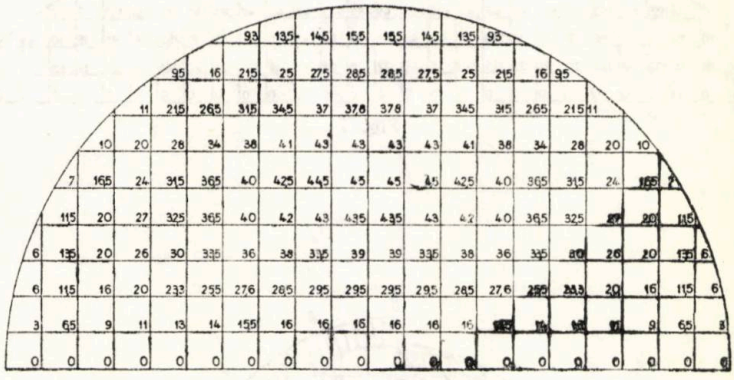


Fig. 4

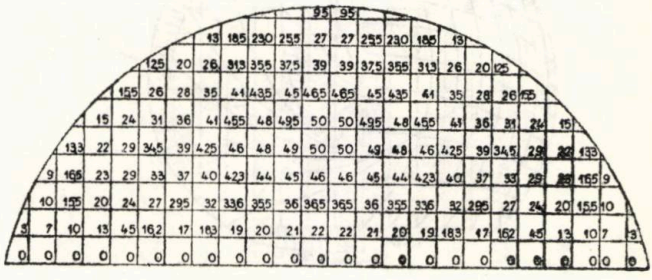


Fig. 5

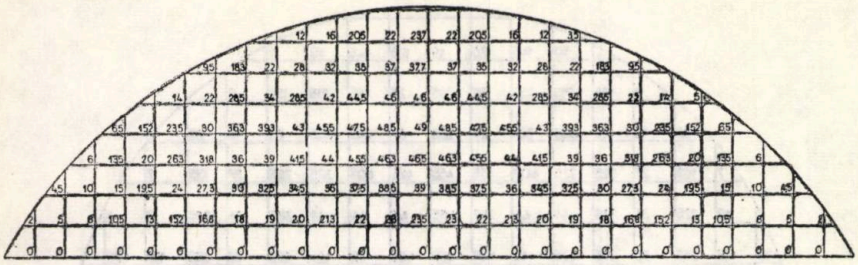


Fig. 6

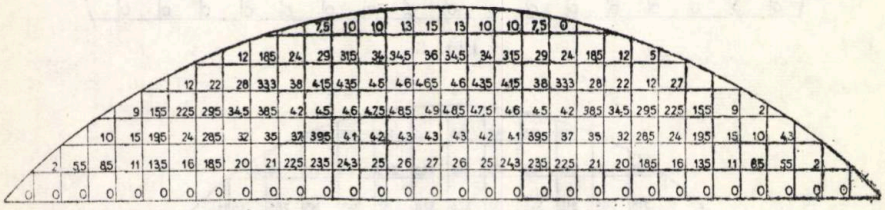


Fig. 7

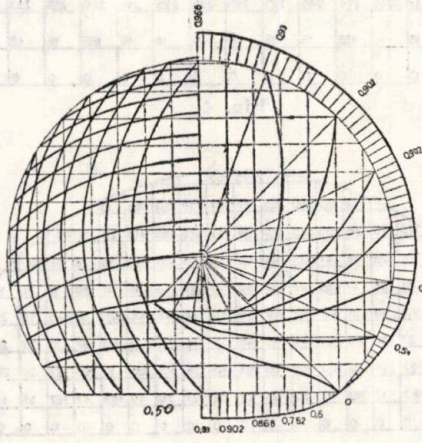


Fig. 8

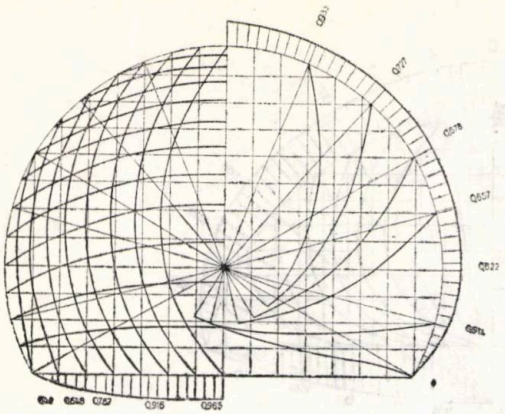


Fig. 9

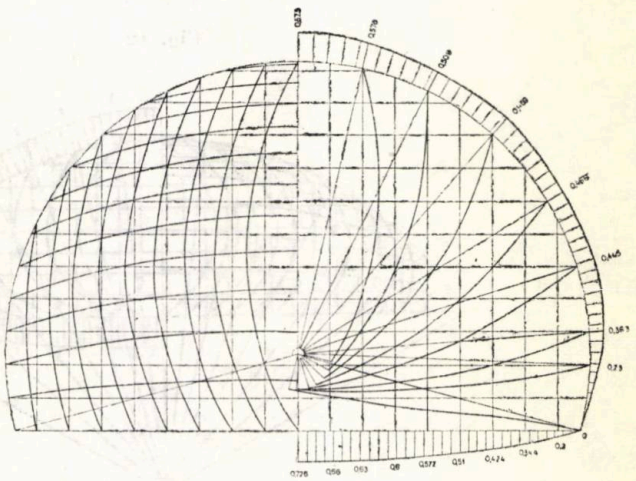


Fig. 10

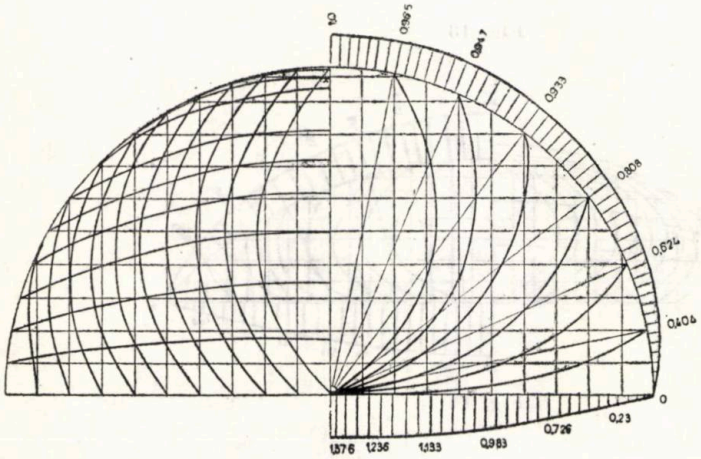


Fig. 11

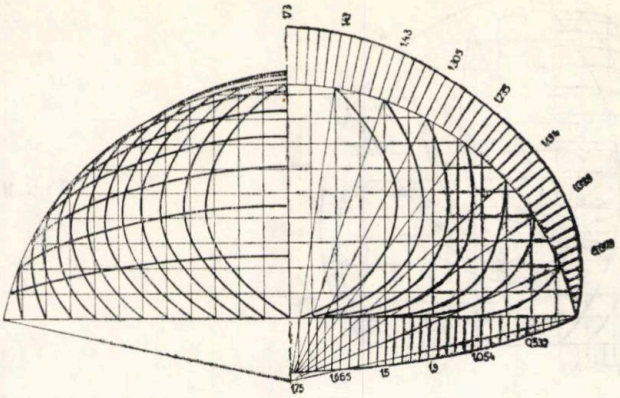


Fig. 12

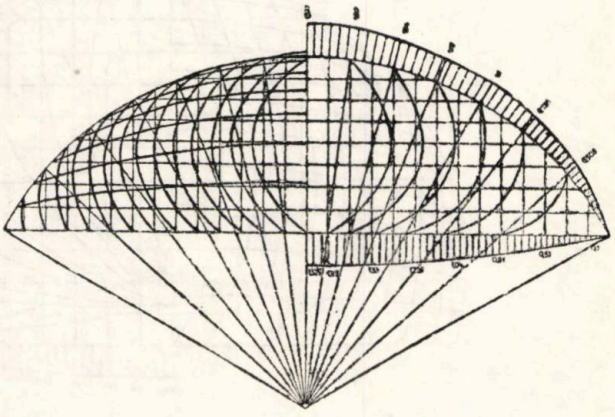
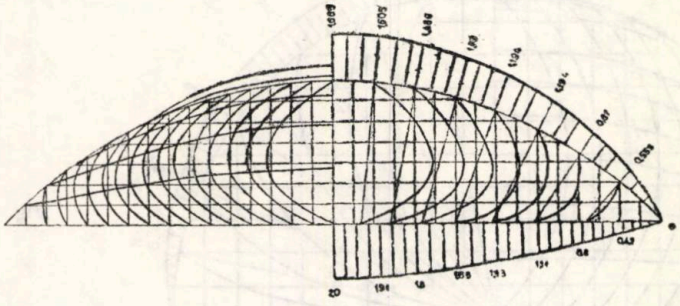


Fig. 13



Flg. 14

Die Messung des Wertes der Tangentenwinkel welche die Tangenten in den gezeichneten Kurven machen wurde mit Hilfe eines Tangenz-Lineals durchgeführt, dessen Konstruktion und Anwendungsweise in der Arbeit [2] gezeigt wurden.

Die Versuchsangaben werden in Tabelle 1 veranschaulicht, wo

Tabelle 1

Nr.	Winkel im Zentrum	Radius cm	Volumen cm^3	$tg\,\alpha_{1max}$	Massstab S	$tg\,\alpha_{max}$	w cm^3	k
1	270	7,07	3 588	0,966	20	19,32	371	0,131
2	240	8,00	3 786	0,965	20	19,35	392	0,0956
3	210	8,96	3 857	0,726	30	21,78	355	0,061
4	180	10,00	3 777	1,376	20	27,52	274	0,0322
5	150	12,11	4 104	1,75	15	26,3	313	0,022
6	120	16,112	3 694,9	1,525	20	30,5	242	0,0072
7	90	22,1	3 273,7	2,00	15	30	214	0,0025

$$(2) \qquad w = \frac{2V}{tg\,\alpha_{max}}, \qquad tg\,\alpha_{max} = S\,tg\,\alpha_{1max}, \qquad k = \frac{w}{d^3}.$$

Der Wert der für, verschiedene Zentralwinkel deduzierten k-Konstante, ermöglicht die Berechnung für w und für andere Durchmesser als diejenige, die in im Rahmen der Versuche verwendet wurden.

Die Werte für k, die auf experimentellem Weg deduziert wurden, ordnen sich in die von der Fachliteratur vorgeschriebenen Grenzen ein.

Schlussfolgerungen

1. Die Verteilung der Torsionspannungen in Kreisabschnittförmigen mit den Winkeln von 90° bis 270°, wurde mit Hilfe des in der Arbeit [2] beschriebenen Stromnetzes und derselben Methodologie bestimmt.

2. Es wird ein Verhältnis der maximalen Torsionspannung in Abhängigkeit vom Querschnittdurchmesser mit dem Winkel im Zentrum und der k - Konstante festgestellt.

Eingegangen am 22. März 1971

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl von Festigkeitslehre

LITERATURVERZEICHNIS

1. Walter J., Karplus Ph. D., *Analog Simulation (Solution of Field Problems)*. New York—Toronto—London, pp. 228—232, 1958.
2. Bauşic V., Horbaniuc D., Miroş I., Giriadă C., Palihovici V., *Studiul repartiţiei eforturilor tangenţiale în secţiunea transversală a unui burghiu spiral, prin metoda analogiei electrice*. Mitteilung an der Konferenz von Mechanik, Bucharest, 27.—30. September, 1965.
3. Теительбаум И. М., *Электрическое моделирование*. М., стр. 303—305, 1959.
4. Меиер цур Капеллеи, *Математические инструменты*. М., стр. 173—174 и 277—278, 1950.
5. Беляев И. М. *Сопротивление материалов*. М., стр. 212—213, 1950.
6. Барбашов Ф. А., *Исследование динамических зависимостей при сверлении*. М. стр. 85, 1963.

STUDIUL PRIN METODA ANALOGIEI ELECTRICE A REPARTIŢIEI EFORTURILOR UNITARE TANGENŢIALE LA BARE CU SECŢIUNEA ÎN FORMĂ DE SEGMENT DE CERC, SUPUSE LA RĂSUCIRE

(Rezumat)

Cu ajutorul analogiei electrice [2] se trasează variaţia tensiunilor tangenţiale provenite din răsucire la bare cu secţiuni în formă de segmente de cerc şi se găseşte o formulă pentru calculul modulului de rezistenţă la răsucire pentru astfel de secţiuni.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. K. 532 ; 678

ÜBER DIE HYDRAULISCHEN EIGENSCHAFTEN DER PVC-RINGRILLENROHRE

VON

C. CIOBANU, PAUL MATEI, LEONID CIOCAN, ELISABETA BILIUȚĂ, M. RĂDULESCU, ILIE RUSU, D. CHETRARU und GH. JUCAN

1. Einleitung

Über die Flüssigkeitströmen in solchen Rohren, sind mehr oder weniger systematische Untersuchungen bekannt. Ein grundsätzliches Studium der hydraulischen Phänomene, der Geschwindigkeitverteilung und der Druckabfälle wurde von W. M ö l l e r ausgeführt [1].

In der vorliegenden Arbeit wurde der Druckabfall in den Ringrillenrohren, von verschiedenen Geometrien, studiert ; die Luft und das Wasser sind als Flüssigkeiten verwendet.

2. Die Widerstandszahl λ für die Luftströmung in den Ringrillenrohren

2.1. Versuchsanlage

Die Versuchsanlage wird in dem Abb. 1 gezeigt.

Für die maximale oder minimale Drucke, wird die Vorrichtung *4*, durch ein optisches Signal — ,ein automatisches Funktionieren der Anlagen gesichert. Die Eintrittsdrucke des Rohres werden bei einer konstanten Grösse, zwischen dem maximalen und minimalen Wert, durch die Handbedienung des Schiebers, und durch das Lesen des h_a auf dem Manometer behalten.

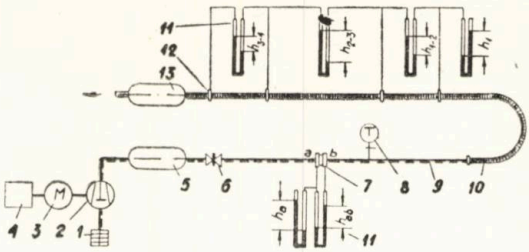
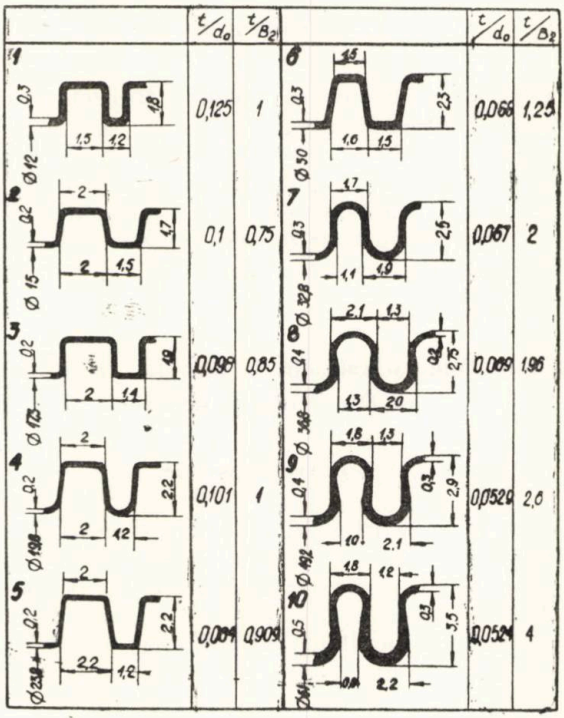


Abb. 1. — *1* — Luftfilter ; *2* — Kolbenluftkompressor ; *3* — Elektromotor ; *4* — Anhalt oder Anlassvorrichtung ; *5* — Ausgleichbehälter ; *6* — Schiebventil ; *7* — Mengenmesser mit Messblende; *8* — Thermometer ; *9* — Versuchsringrillenrohr ; *10* — Behälter ; *11* — U - Rohr - Manometer ; *12* — Stahlrohr ; *13* — Druckaufnahmegerät.

Tabelle 1



2.2. Forschungverfahren

In dieser Arbeit versucht man die Bestimmung der Widerstandzahl λ zu erreichen. Zum diesem Zweck wurden 10 Rohre mit folgenden Durchmessern : 12, 15, 17, 20, 24, 30, 33, 37, 50, 66 mm, mit verändlicher Geometrie, studiert (Tabelle 1) Dafür fanden folgende Operationen statt :

a. *Druckabfallmessung*. Um den Druck und die Druckabfälle zu bestimmen sind Mikromanometer, U-Rohr-Manometer mit Wasser oder Quecksilber, und Manometer Bourdon in 0,6 bis 1 Präzisionklasse verwendet worden.

b. *Die Durchflussmenge* wird mit den Messblenden (derer Innenmesser $d = 11$; 20 ; 32 mm sind) bestimmt, die auf dem Stahlrohr *12* (Innenmesser 50 mm) den Standardrestriktionenbedingungen zufolge montiert worden sind. In denselben Bedingungen sind auch die Ringmesstorren für die Bestimmung des hydrostatischen Druckes, montiert worden. Die Arbeitslänge des Versuchrohres ist gleich 3 000 mm.

c. Für *die Lufttemperatur* ist ein Thermometer (Präzision 0,1°C) verwendet worden, das 1 000 mm nach den Messblenden in einem Strömabwärtspunkt montiert wurde.

2.3. Bemerkungen

1. Die Ringrillendeformationen und -verlängerungen, wie auch die Temperatur- und die Druckveränderungen der Atmosphäre, sind in die Rechnungen eingeführt worden.

2. In den Rohren mit $d = 30$ mm hört man einen hohen Schall.

3. Die Widerstandszahl λ für die Wasserströmung in Ringrillenrohren

3.1. Versuchsanlage

Die Versuchsanlage wird in Abb. 2 gezeigt.

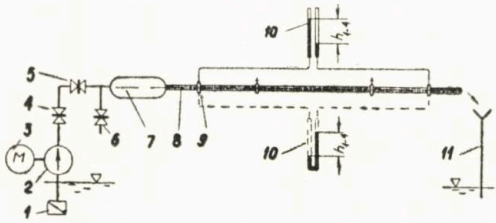


Abb. 2. — *1* — Saugkorb; *2* — Zentrifugalpumpe; *3* — Elektromotor; *4*, *5*, *6* — Schiebwentil; *7* — Schwingungs einsatzbehälter; *8* — Versuchrohr ; *9* — Ringmesstorren ; *10* — U-Rohr-Manometer ; *11* — Wasserbehälter.

3.2. Forschungverfahren

Im Vergleich mit §2.2, das Forschungsverfahren führt einige Veränderungen ein, wie :

a) die Flüssigkeitströmung fliesst frei ;

b) für die Durchflussmenge wird die Gewichtmethode angewendet ;

c) die Lufteinschiessung wird immer in Beachtung gezogen. Für den Druck oder für die Druckabfälle werden dieselben Methoden verwendet.

Bemerkung. Die Grösse der Strömunggeschwindigkeiten waren : 0,04... ...6,5 m/s für Wasser, und 0,6...130 m/s für Luft.

4. Die Beartbeitung und die Interpretation der Versuchsresultaten

Um die Beziehung $\lambda = f(\mathcal{R}e)$ darzustellen, war es nötig die folgenden Grössen zu bestimmen.

4.1. Luft

a. *Volumendurchfluss* für Normalzustand, nach [4] ist :

$$V_g = 0{,}75\,\alpha\varepsilon d^2 \sqrt{\frac{h_{ab}\,\gamma_l}{\gamma_{tA}}} \sqrt{\frac{p_a + B}{t_1 + 273}}\,\sqrt{K_p}, \qquad [\mathrm{m^3/h}], \tag{1}$$

mit : α — Blendezahl ; ε — Expansionszahl ; d — Innendurchmesser der Messblende ; h_{ab} — U-Rohr-Manometerindikationen für die Messblende ; γ_l — das spezifische Gewicht der U-Rohr Flüssigkeit ; γ_{tA} — das spezifische Gewicht der Luft im Normalzustand (trockene Atmosphäre) ; p_a — der hydrostatische Druck [mmQS], im Stromaufwärts gegen Messblenden ; B — barometrischer Druck [mmQS] ; t_1 — die Temperatur der Flüssigkeiten [°C] ; K_p — Korrekturkoeffizient für $p > 3$ at (in unseren Berechnungen $K_p = 1$).

b. *Volumendurchflussmengen* für die Luft, in den Arbeitbedingungen :

$$V_l = V_g \frac{760\ (t + 273)}{273(p + B)}, \qquad [\mathrm{m^3/h}]. \tag{2}$$

c. *Reynolds'sche Zahl* :

$$\mathcal{R}e = \frac{v d_0}{\nu}, \tag{3}$$

wo : d_0 — der Innendurchmesser der Rohren ist ; v — mittlere Geschwindigkeit der Luftströmme ; ν — kinematische Luftzähigkeit.

Bei 0°C und 760 mmQS, ist :

$$\mathcal{R}e = \frac{V_g\, d_0\, \gamma_{tA}}{3\,600\, A\, \eta_a g}, \tag{4}$$

entsprechend : A — Querrohrfläche ; η_a — dynamische Luftzähigkeit ; g — Erdbeschleunigung.

d. Die *Widerstandzahl* nach [3], ist :

$$\lambda = \frac{6{,}05\, d_0^5\, (p_i^2 - p_f^2)}{RTLG^2}, \tag{5}$$

mit : L — die Länge der Versuchsrohrstrecke ; $R = 29{,}27$ kgm/kg grd ; T — die absolute Temperatur ; t — die Temperatur der Flüssigkeit ; $G = V\,\gamma_{tA}/3\,600$ — Luftdurchflussmenge [kp/s] ; $p_i = B + p_1$, die hydrostatische Eintrittsdrucke der Versuchrohrstrecke ; $p_f = p_1 - \Delta p$, die hydrostatische Austrittdrucke der Versuchrohrstrecke ; Δp — der Druckverlust der Messrohrstrecke.

e. *Geschwindigkeit* :

$$v = \frac{V_t}{3\,600\,A}, [\mathrm{m/s}]. \tag{6}$$

4.2. Wasser

a. *Wasserdurchflussmenge* :

$$Q = \frac{V}{t}, \quad [\mathrm{m^3/s}], \tag{7}$$

wo V ist der Durchflussvolume der in zugehöriger Zeit t, mit einer Stoppuhr ermittelt ist.

b. *Widerstandzahl* :

$$\lambda = \frac{2gh}{v^2}\,\frac{d_0}{L}, \tag{8}$$

mit : h — der Druckverlust [mWS] ; $v = Q/A$, die mitlere Geschwindigkeit.

c. *Reynolds'sche Zahl* :

$$\mathcal{R}e = \frac{vd_0}{\nu_W}, \tag{9}$$

wo : ν_W — kinematische Wasserzähigkeit ist.

Die $\lambda = f(\mathcal{R}e)$ — Kurven sind in Abb. 3...5 dargestellt.

4.3. Interpretation der Versuchsresultaten

Die Gruppierung der Kurven $\lambda = f(\mathcal{R}e)$ ist nach dem geometrischen Kriterium der Ringrillen gemacht worden. In jeder Abbildung wurde die Ringrillen mit einer ähnlichen Quersektion der Ringrillenwänden gruppiert. In jeder Abbildung ist eine Abweichung von der logischen Ordnung der Kurven zu erwähnen, die folgenden Ursachen haben könnten :

1. Die Unmöglichkeit einer geometrischen Ähnlichkeit.

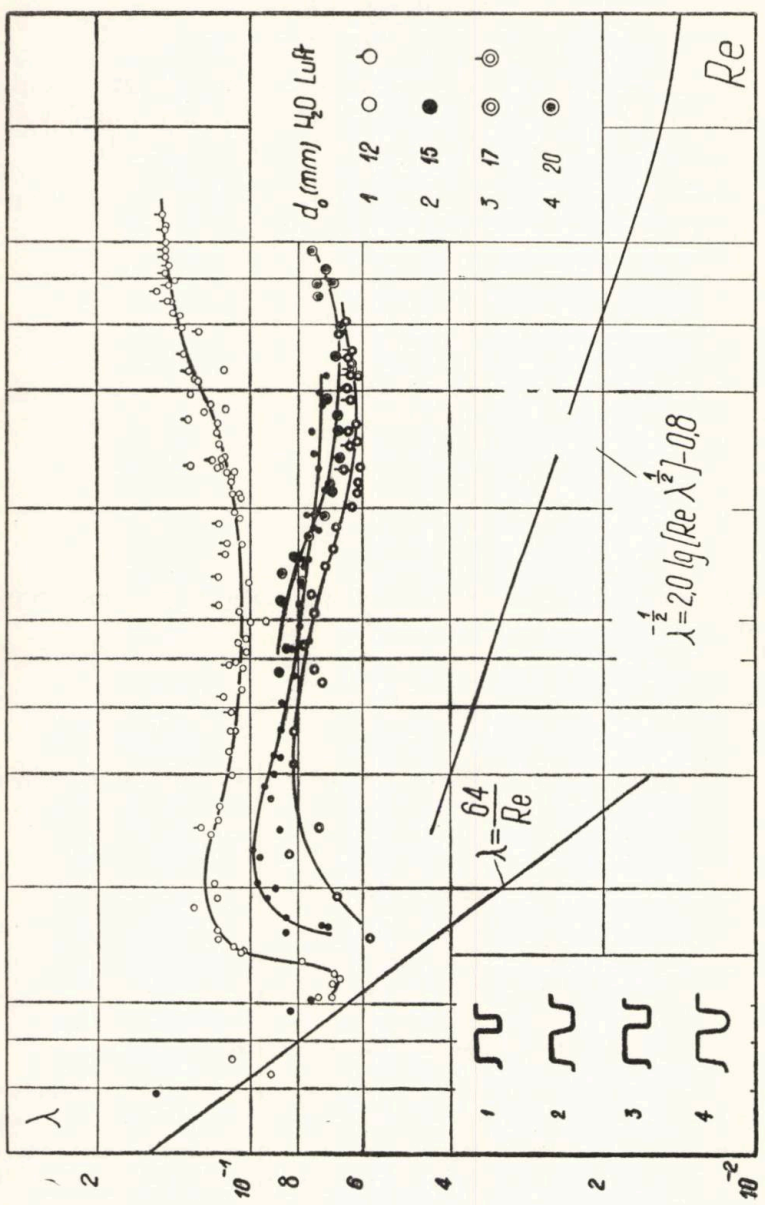

λ
Re
d_0 (mm) H_2O Luft
1 12
2 15
3 17
4 20
$\lambda = \frac{64}{Re}$
$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \lg [Re \sqrt{\lambda}] - 0,8$
10^{-1}
10^{-2}
$6\ 8\ 10^3$
$2\ 4\ 6\ 8\ 10^4$
$2\ 4\ 6\ 8\ 10^5$
$2\ 4$

Abb. 3

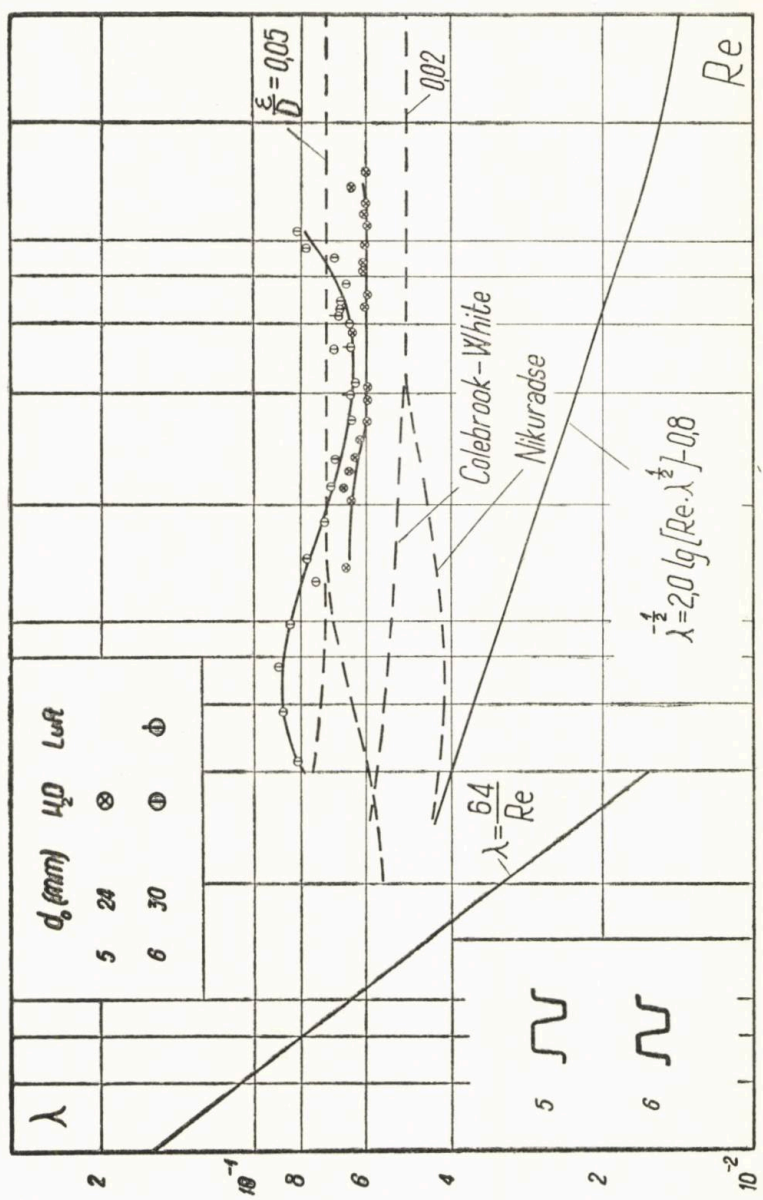

λ
Re
d_0 (mm) H_2O Luft
5 24
6 30
$\frac{\varepsilon}{D}=0{,}05$
0,02
Colebrook-White
Nikuradse
$\lambda^{-\frac{1}{2}}=2{,}0\lg[Re\cdot\lambda^{\frac{1}{2}}]-0{,}8$
$\lambda=\frac{64}{Re}$

Abb. 4

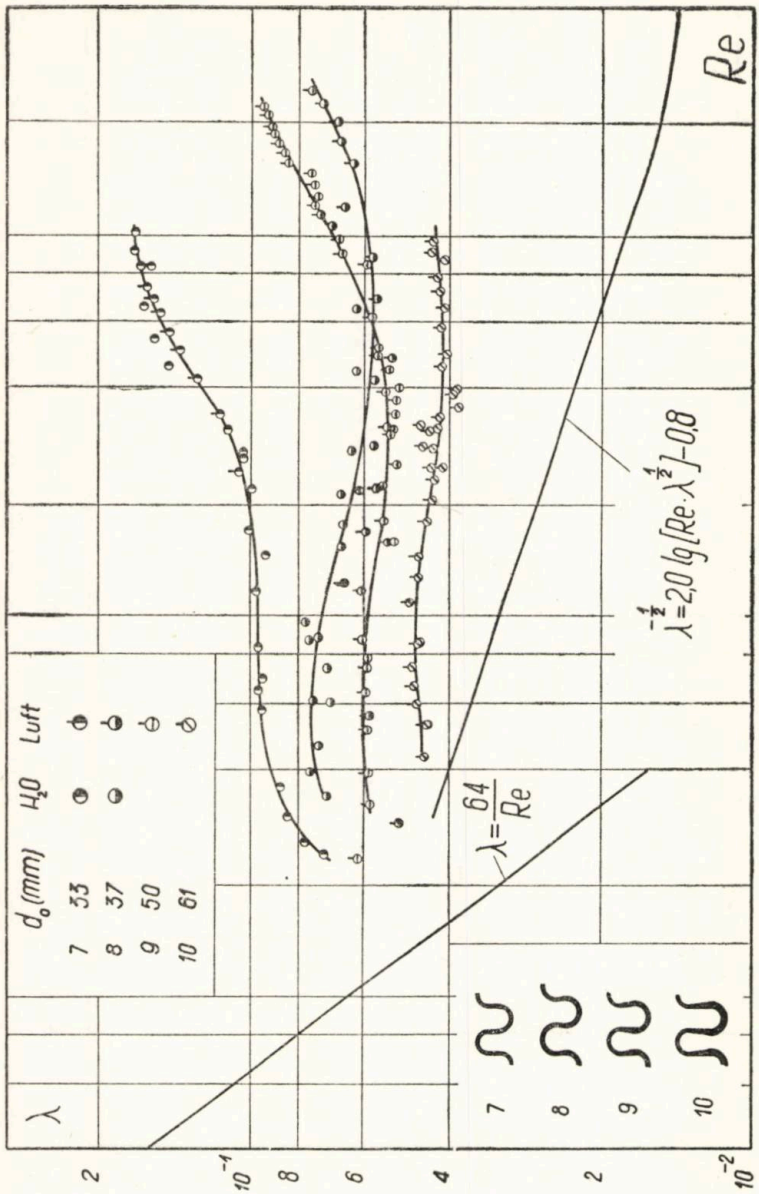

λ
d_0 (mm) H_2O Luft
7 33
8 37
9 50
10 61
$\lambda = \frac{64}{Re}$
$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2{,}0 \lg [Re \cdot \lambda^{\frac{1}{2}}] - 0{,}8$
Re

Abb. 5

2. Die Unmöglichkeit einer analytischen Beziehung um die dimensionlosen Werte t/d und t/B_2 (Abb. 6) auszudrücken.

3. Die Ansteigung des λ, könnte man durch die Deformationen der Rohre (der Ringrillengeometrie und der Länge der Rohre), erklären ; z. B. bei 1 kp/cm² steigt die Länge der Ringrillenrohre mit 0,93% für $d = 12$ mm und bei 1,36 kp/cm², mit 1,65% für $d = 33$ mm an.

Es ist zu verstehen warum es unmöglich ist, eine allgemeine Beziechung zu bestimmen.

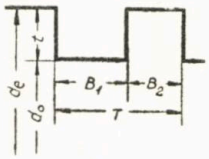


Abb. 6

5. Schlussfolgerungen

Die Benützung der Ringrillenrohre für den Transport der Flüssigkeiten, ist nur für kurze Strecken möglich ; da die Steuerfähigkeit eine wesentliche charakteristik ist.

Eingegangen am 20. Januar 1972

Technische Hochschule, Jassy,
Laboratorium für Hydraulik
und Strömungsmaschinen

LITERATURVERZEICHNIS

1. Möller W., *Untersuchungen an Ringrillenrohren mit rechteckigem Rillenquerschnitt.* Dissertation, T. H. Hannover, 1965.
2. Möller W., *Untersuchungen zur Klärung von Widerstand und Strömung in gewellten Rohren und Schläuchen.* Konstruktion, *4*, 140—143 (1967).
3. Артюхов И. М., Шорин С. Н., *Газоснабжение.* Изд. мин. коммунального хозяйства РСФСР , М., 1956.
4. Ghiulea A., Olariu C., *Măsurarea debitelor cu ajutorul diafragmei.* Ed. tehn., Buc., 1956.
5. Идельчик И. Е., *Справочник по гидравлическим сопротивлениям.* ГЭИ, М.—Л., 1960.

ASUPRA CARACTERISTICILOR HIDRAULICE ALE TUBURILOR RIFLATE DIN PVC

(Rezumat)

S-a studiat comportarea din punct de vedere hidraulic a tuburilor riflate din PVC de producție indigenă (UPMP — Iași) în transportul aerului și apei. O abordare teoretică este impiedicată de imposibilitatea stabilirii unei similitudini geometrice, ca urmare a variabilității riflurilor, fapt oglindit de repartiția curbelor $\lambda = f(\mathcal{R}e)$ în grafice. Astfel de tuburi provoacă pierdere de sarcină crescută, însă flexibilitatea lor le recomandă pentru racorduri scurte.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 536.73

CONSIDERAȚII ASUPRA SISTEMULUI DEDUCTIV PENTRU STABILIREA CONSECINȚELOR PRINCIPIULUI AL DOILEA ÎN TERMODINAMICA FENOMENOLOGICĂ (II)

DE

GÉRARD D'ALBON

1. Introducere

În prima parte a studiului [1] s-a inițiat analiza celor mai cunoscute sisteme deductive, care stabilesc consecințele principiului al doilea în termodinamică. S-a propus un sistem care conține elemente inedite necesare a preciza și clarifica unele aspecte confuze în prezentările clasice.

Sistemele termodinamice au fost clasificate în sisteme *A*, pentru care sînt posibile transformări reversibile, și sisteme *B*, care nu pot suferi transformări reversibile. În continuare au fost analizate patru enunțuri ale principiului al doilea al termodinamicii (T h o m s o n, C l a u s i u s, C a r a t h e o d o r y și un enunț nerevendicat).

În această lucrare se continuă analiza sistemelor deductive, în vederea obținerii unei forme de sistematizare deductivă, cea mai bine adecvată din punct de vedere metologic pentru dezvoltarea termodinamicii tehnice.

2. Analiza preliminară a echivalenței enunțurilor principiului II al termodinamicii

2.1. Echivalența enunțurilor unui același principiu fizic și căile de demonstrare a echivalenței

Enunțurile principiului al doilea au formulări verbale total diferite și este natural să ne întrebăm dacă ele sînt echivalente, adică dacă ele sînt într-adevăr diverse exprimări verbale ale unui același conținut fizic. Tratarea științifică a acestei probleme implică o definiție, cu care să se poată lucra într-un sistem deductiv, a echivalenței a două enunțuri.

Definim ca echivalente două enunțuri dacă sferele consecințelor lor deductive coincid.

Dar deoarece nimic nu se deduce numai dintr-un adevăr admis, ci din acesta și altele admise, *ca echivalența să fie perfectă trebuie ca și sferele adevărurilor auxiliare introduse în sistemul deductiv să fie aceleași.*

Pe de altă parte, geneza principiilor fizice constă tocmai în confirmarea permanentă de către experiența fizică a tuturor consecințelor lor. Capacitatea euristică are următoarea schemă :

Într-o fază inițială s-au căutat (cel puțin pentru principiile I și II) realizări de „perpetum mobile" de speța I și II, adică realizări care contrazic azi principiile și aceste căutări au avut eșecuri permanente, formulîndu-se astfel principiile și căutînd noi consecințe ale lor, care și ele au fost confirmate de experiență. Astfel, principiul formulat, are o sferă foarte largă de verificări deci și o mare probabilitate de a fi un adevăr. Practic, pentru aceste două mari principii, cel puțin în domeniul macrofizic, orice consecințe noi deduse pot fi considerate certe.

Cu cît o consecință dedusă derivă dintr-un principiu mai larg cu atît probabilitatea ca ea să fie un adevăr este mai mare.

Astfel, nu-i de loc de neașteptat ca legea lui Ohm, de exemplu, să nu se confirme în unele cazuri (așa cum se întîmplă în realitate pentru semiconductori), dar dacă legea lui Ohm ar fi fost o consecință a unui nou principiu fizic, acest lucru ar fi fost, conform cu concepțiile actual admise, imposibil.

În stadiul actual al științei, principiul al doilea al termodinamicii (ca de altfel toate principiile fundamentale ale termodinamicii, ale fizicii în general, și în sfera superioară cele ale fizicii naturale materialiste), permite :

a) o sistematizare deductivă a fizicii prin includerea drept consecințe deductive a principiilor, a acelor legi fizice care pot fi deduse din ele și care au fost formulate în dezvoltarea istorică a fizicii ca legi independente ;

b) o verificare a experienței, care, admitem azi, nu poate contrazice marile principii. Evident, prin aceasta nu se înțelege că acordăm prioritate principiului față de experiența fizică certă, dar că, de cîte ori se întîmplă într-o experimentare ca interpretarea să nu fie compatibilă cu principiile, trebuie să verificăm atît experiența cît și interpretarea, care au, probabil, o eroare. Astfel, se admite de două sute de ani că nu se poate realiza un perpetum mobile de speța I-a, și ori de cîte ori o concepție tehnică de acest gen este prezentată, avem certitudinea că ea conține o eroare ;

c) găsirea în continuare, pe cale deductivă, a noi consecințe care știm că vor fi confirmate de experiență și practică.

De aici se desprind unele caractere ale principiilor în genere și în speță, ale principiului al doilea :

a) sfera largă a consecințelor deductive ;

b) nu toate aceste cunoștințe, cunoscute ca legi fizice, sînt integrate în sistem ;

c) posibilitatea de a stabili, în continuare, noi consecințe.

Datorită acestor caractere, verificarea coincidenței sferei consecințelor nu este posibilă prin epuizarea lor. Chiar dacă s-ar face o astfel de verificare la un nivel dat al științei, concluzia privind echivalența n-ar fi absolută, fiindcă noi consecințe stabilite în continuare vor putea face ca sferele consecințelor să nu mai coincidă.

Echivalența a două enunțuri E_1 și E_2 poate fi însă stabilită dacă se demonstrează că dacă E_1 adevărat și E_2 este adevărat și dacă E_2 adevărat și E_1 este adevărat.

În acest mod s-a demonstrat că sfera consecințelor lui E_2 este cuprinsă în sfera consecințelor lui E_1 și, de asemenea, că sfera consecințelor lui E_1 este cuprinsă în cea a lui E_2 și deci cele două sfere coincid.

2.2. Echivalența enunțurilor lui Thomson și Clausius

În cele ce urmează se va nota cu E_1, E_2, E_3 și E_4 respectiv, enunțurile lui Thomson, Clausius (cu precizările aduse în [1]), Caratheodory și acela care admite existența entropiei și a temperaturii cu proprietățile lor. Sfera consecințelor acestor enunțuri se va nota respectiv cu S_1, S_2, S_3 și S_4.

Se va demonstra pe calea propusă echivalența enunțurilor E_1 și E_2.

Se consideră într-un studiu inițial I o singură sursă de căldură de temperatură T_0 (fig. 1).

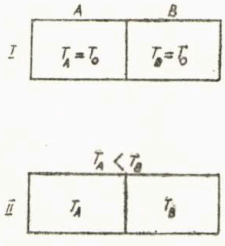


Fig. 1

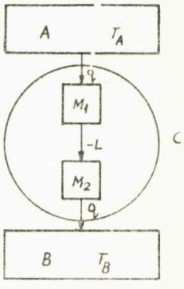


Fig. 2

Presupunem contrar lui E_2, că realizăm un transfer de căldură de la A la B și obținem un stadiu II cu două surse A și B cu $T_A < T_B$. O mașină cu funcționare ciclică produce un lucru mecanic $-L$ folosind sistemul II cu două surse.

Întregul proces a realizat un lucru netermic $-L$, pornind de la un sistem I cu o singură sursă, ceea ce contrazice E_1. Deci, dacă E_1 adevărat și E_2 adevărat. E_2 este consecință a lui E_1 și sfera S_2 a consecințelor lui E_2 este cuprinsă în sfera S_1 a consecințelor lui E_1.

Observăm că singura ipoteză fizică auxiliară introdusă este aceea că putem transforma căldură în lucru mecanic cînd dispunem de două surse de temperaturi diferite.

Ipoteza $dT/dq > 0$ făcută cînd am admis că în urma transferului de căldură obţinem $T_B > T_A$, nu este absolut necesară căci dacă $dT/dq < 0$ se obţine din stadiul I un stadiu II cu două surse dar cu $T_B < T_A$, căldura circulînd însă în acest caz de la $T_A > T_B$ la T_B, în acord cu E_2.

Condiţia de stabilitate $dT/dq > 0$ este şi ea o consecinţă a enunţului E_1 şi condiţia contrară ei este exclusă.

Pentru a demonstra că E_1 este o consecinţă a lui E_2 admitem în stadiul I un sistem cu două surse A şi B cu $T_A < T_B$ (fig. 2). Contrar lui E_1, o maşină cu funcţionare ciclică M_1, transformă căldura primită de la A în lucru mecanic $-L$. Maşina M_2 transformă prin frecări $-L$ în q încălzind B.

Se obţine astfel un transfer de căldură de la A la B, folosind un sistem intermediar C care nu schimbă decît căldură cu A şi B cu toate că $T_A < T_B$, contrar lui E_2. Deci dacă E_2 e adevărat, atunci şi E_1 este adevărat. S_1 este cuprins în S_2 deci:

$$S_1 = S_2.$$

Pentru această ultimă demonstraţie *s-a admis adevărul fizic auxiliar că lucrul mecanic se poate transforma în căldură furnizată la orice temperatură.*

Cele două enunţuri E_1 şi E_2 sînt deci echivalente, fără a putea demonstra că sînt şi absolut echivalente în sensul celor arătate anterior.

2.3. Enunţurile E_3 şi E_4

Enunţurile E_3 şi E_4 se aplică numai în cazul corpurilor din categoria A, deci S_3 şi S_4 nu pot cuprinde în întregime sferele S_1 şi S_2 care coincid.

În cursul dezvoltării în continuare a consecinţelor deductive ale celor patru enunţuri se va stabili relaţia sferelor S_1, S_2, S_3 şi S_4 sub aspectul analizei echivalenţei relative şi absolute. Se vor prezenta de asemenea exemple de consecinţe cuprinse în S_1 şi S_2 care sînt exterioare lui S_3 şi S_4.

3. Analiza noţiunilor de temperatură şi entropie

3.1. Calea de definire a temperaturii folosind existenţa fizică a gazelor în stare perfectă

Principiul zero admite definirea egalităţii a două temperaturi. Din principiul II în formularea E_2 propusă vezi ([1]) rezultă:

$$\text{dacă } A \xrightarrow{q} B \xrightarrow{q} C \text{ atunci nu este posibil } C \xrightarrow{q} A.$$

Rezultă că putem defini arbitrar egalitatea a două temperaturi și inegalitatea a două temperaturi prin condițiile :

$$1)\ A \overset{q}{\rightarrow} B, \qquad T_A = T_B\ ;$$

$$2)\ A \overset{q}{\rightarrow} B, \qquad T_A > T_B\ ,$$

elementele arbitrare fiind compatibile cu experiența fizică.

Mulțimea valorilor temperaturii, pe această cale, este ordonabilă și permite să se constate, pe cale de experiență fizică directă, dacă relația $T = T(x)$ (unde x este un parametru fizic măsurabil) este minoră.

Dezvoltarea deductivă a consecințelor unui principiu fizic permite includerea în sistem a unor legi fizice verificate de experiență, alese arbitrar și de aici derivă variate posibilități de alcătuire a sistemelor.

În continuare, se va dezvolta sistemul deductiv folosind existența unui model fizic al gazelor în stare perfectă.

3.1.1. *Definirea gazelor în stare perfectă*

Evident, în momentul în care temperatura nu este încă definită ca parametru măsurabil nu putem defini și verifica experimental definiția gazelor reale în stare perfectă prin relația $pv = RT$. Trebuie găsită logic calea de definire, care să poată fi confruntată cu experiența folosind numai cunoașterea valorilor temperaturii ca valori ordonabile.

Definim deci gazul perfect prin următoarele proprietăți :

P_1 : $pv = f(T)$, adică într-un domeniu de temperaturi constante (egalitatea temperaturilor este definită și poate fi constatată fizic) $pv =$ $=$ const.

P_2 : gazul aparține corpurilor din categoria A în raport cu Q și L.

P_3 : $U = U(T)$; într-o transformare izotermă suma schimburilor de energie cu exteriorul este nulă.

Se poate constata experimental, fără să știm să măsurăm temperatura, existența unui domeniu limitat de stări fizic existente ale gazelor reale, în care aceste proprietăți sînt verificate. Se poate verifica, de asemenea, că relația $T = f(pv)$ este univocă, deoarece mulțimea valorilor lui T este ordonabilă și pv măsurabil.

3.1.2. *Definiția temperaturii ca parametru măsurabil*

Numai pentru domeniul limitat în care s-au constatat proprietățile P_1, P_2 și P_3 ale unui gaz real se definește temperatura ca parametru măsurabil admițîndu-se arbitrar pentru relația univocă a cărei existență este stabilită, forma $T = Kpv$. Constanta K se stabilește arbitrar prin condițiile cunoscute. Valoarea constantei nu intervine de altfel cu nimic în structura logică a sistemului.

O observație importantă este aceea că astfel nu s-a realizat încă decît definiția temperaturii într-un domeniu restrîns de valori.

3.2. Entropia

3.2.1. *Definiția entropiei*

Entropia se definește prin relația

$$dS = \frac{dQ}{T},$$

(în care dS este creșterea de entropie provocată de un aport de căldură dQ *într-un proces reversibil*, iar T este temperatura corpului cînd a primit această cantitate de căldură). Relația arată că entropia poate fi definită numai pentru corpurile din categoria A.

S-a notat dS deși încă, evident, nu știm dacă S este un parametru de stare. Raționamentele clasice permit să se demonstreze că pentru gazele în stare perfectă (deci care se bucură de proprietățile P_1, P_2 și P_3 și acceptînd definiția temperaturii ca parametru măsurabil arătată) este o diferențială totală. Fără a comenta aceste raționamente cunoscute ce au diverse formulări, se menționează totuși că pentru a demonstra acest lucru sînt necesare și suficiente proprietățile P_1, P_2 și P_3 precum și relația admisă arbitrar care definește temperatura în domeniul limitat arătat, $T = Kpv$.

3.2.2. *Ciclurile cu două surse de căldură*

Se vor considera în continuare transformările ciclice oarecare ce schimbă căldură cu două surse, I de temperatură T_I și II de temperatură T_{II}, $T_I > T_{II}$ și, de asemenea, lucru mecanic cu exteriorul. În conformitate cu principiul I :

$$Q_1 + Q_2 + L = 0,$$

unde Q_1 este căldura schimbată cu I, Q_2 — cu II, iar L lucrul mecanic.

Toate schimburile de energie sînt considerate pozitive atunci cînd energia este primită de corpul ce suferă evoluția ciclică.

a) *Ciclul direct și ciclul invers.* Vom nota în genere : $\eta = \frac{-L}{Q_1}$ și $\overset{\curvearrowright}{\eta} = \frac{\overset{\curvearrowright}{-L}}{Q_1}$ pentru ciclul direct, unde $Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$ iar $-L > 0$ și cu $\overset{\curvearrowleft}{\eta} = \frac{\overset{\curvearrowleft}{-L}}{Q_1}$ pentru ciclul invers, unde $Q_1 < 0$, $Q_2 > 0$ și $-L < 0$.

Simbolul η avînd semnificația generală acordată poartă denumirea de randament al ciclului numai în cazul $\overset{\curvearrowright}{\eta}$.

Considerînd cunoscute raționamentele clasice care duc la concluzia lui Carnot că toate ciclurile reversibile au același randament funcție numai de T_1 și T_2, se fac totuși unele observații care trebuie reținute. Analiza acestor raționamente arată că : pornind de la E_1 și făcînd ipoteza că între I și II lucrează un sistem compus din două mașini cu funcționare ciclică, M_1 cu funcționare directă și M_2 cu funcționare inversă (fig. 3), și că $Q_1 + Q'_1 = 0$, sistemul S devine monoterm adică lucrează cu o singură sursă (II) și, în consecință, lucrul mecanic furnizat de sistem $-(L + L') \leqslant 0$, rezultă :

$$\overset{\curvearrowright}{\eta_1} = \frac{-L}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} \overset{\curvearrowleft}{\leqslant} \eta_2 = \frac{-L}{Q'_1} = \frac{Q'_1 + Q'_2}{Q'_1},$$

căci $Q_1 = -Q_2$ și $-L < L'$, ambele fracții fiind pozitive. La aceeași concluzie se poate ajunge pornind de la E_2 și făcînd ipoteza că $-L - L' = 0$, ceea ce reduce S la un sistem care nu schimbă decît căldură cu sursele I și II.

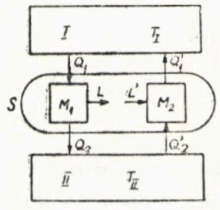


Fig. 3

Deci atît E_1 cît și E_2 permit să se demonstreze că $\overset{\curvearrowright}{\eta} \leqslant \overset{\curvearrowleft}{\eta}$.

Se observă că această concluzie importantă făcută pe parcurs înainte de a se face vreo ipoteză asupra reversibilității ciclurilor trebuie reținută ca atare căci are interpretări practice utile nefolosite rațional în tratatele clasice. Asupra acestora se va reveni ulterior.

b) *Reversibilitatea și ciclurile reversibile cu două surse.* Procesele reversibile au un ansamblu de proprietăți. Dintre acestea sînt de reținut ca utile în sistemul deductiv :

P_{1R} : procesele reversibile sînt ranversabile, adică pot fi parcurse în ambele sensuri trecînd prin aceeași succesiune de stări ;

P_{2R} : procesul este o succesiune continuă de stări echilibrate ;

P_{3R} : la ranversarea sensului unui proces valoarea absolută a fiecărui schimb de energie în parte (energiile fiind considerate diverse după natura lor Q termică și E netermică) se conservă dar semnul său se schimbă :

$$\overset{\curvearrowright}{E}_{1-2} = -\overset{\curvearrowleft}{E}_{2-1} \quad \text{și} \quad \overset{\curvearrowright}{Q}_{1-2} = -\overset{\curvearrowleft}{Q}_{2-1}$$

și în general

$$\overset{\curvearrowright}{E}_{1-2} = -\overset{\curvearrowleft}{E}_{2-1}.$$

Faptul că un proces cvasistatic este reversibil nu poate fi demonstrat, de altfel experiența arată că nu toate procesele cvasistatice sînt reversibile. Se constată însă experimental că unele procese cvasistatice sînt și reversibile adică se bucură la limită de proprietățile enunțate. Admitem deci ca un fapt constatat experimental existența acestor procese.

Dacă se consideră un ciclu reversibil realizat de un corp termodinamic ce schimbă căldură cu două surse, parcurs o dată direct și apoi invers, în baza lui P_{3R} rezultă :

$$\overset{\curvearrowright}{\eta} = \frac{-L}{Q_1} = \frac{-(-L)}{-Q_1} = \overset{\curvearrowleft}{\eta}.$$

Ținînd seama și de relațiile anterior stabilite § **3.2.2** a, în cazul ciclurilor reversibile rezultă

$$\begin{matrix} \overset{\curvearrowright}{\eta}_{1\text{rev.}} \leqslant \overset{\curvearrowleft}{\eta}_{2\text{rev}} \\ \overset{\curvearrowleft}{\eta}_{1\text{rev.}} \geqslant \overset{\curvearrowright}{\eta}_{2\text{rev.}} \end{matrix} \quad \text{și deci} \quad \eta_{1\text{rev.}} = \eta_{2\text{rev.}}.$$

Toate ciclurile reversibile funcționînd între aceleași surse de căldură cu temperaturile date T_1 și T_2 au același randament, indiferent de natura corpului termodinamic și de toți parametrii ciclului, în afară de T_1 și T_2.

Rezultă că $\eta_{\text{rev.}} = f(T_1 \text{ și } T_2)$. Această funcție poate fi stabilită dacă se consideră ciclul reversibil al gazelor în domeniul în care se comportă ca perfecte (ciclul Carnot).

Cea mai simplă cale rezultă din faptul că pentru gazele în stare perfectă s-a demonstrat că dS este o diferențială totală. Pe această cale sau o alta se stabilește :

$$\eta_c = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \eta_{\text{rev.}}.$$

3.2.3. *Entropia parametru de stare pentru toate corpurile de categoria A*

Principiul II apare ca un principiu cu o mare capacitate de generalizare. S-a stabilit că $\eta_c = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$; principiul II permite să se generalizeze $\eta_{\text{rev.}} = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$.

S-a stabilit că dS este o diferențială totală pentru gazele în stare perfectă ; *principiul II permite să se arate că* dS *este o diferențială totală pentru toate corpurile de categoria A.*

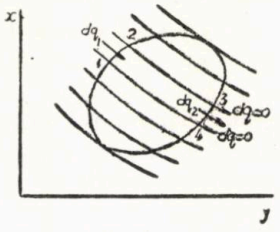


Fig. 4

Raționamentul clasic pornește de la relațiile :

$$\frac{q_1 + q_2}{q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \qquad 1 + \frac{q_2}{q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

de unde rezultă

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{-q_2}{q_1} \quad \text{și} \quad \frac{-q_2}{T_2} = \frac{q_1}{T_1} \quad \text{sau} \quad \frac{q_2}{T_2} + \frac{q_1}{T_1} = 0.$$

Pentru a demonstra că S este un parametru de stare se arată că pentru un ciclu reversibil oarecare $\oint dS = 0$. Se reamintește că în acest scop se imaginează o rețea de adiabate reversibile, infinit vecine, ce împart ciclul într-o infinitate de cicluri elementare reversibile, lucrînd cu două surse date.

Pentru fiecare ciclu elementar (ca *1—2—3—4*) pe adiabatele *14* și *23*, d$S = 0$ iar pentru transformările reversibile *12* și *34* se scrie :

$$\frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = 0.$$

Rezultă $\oint dS = 0$.

Observăm că în acest raționament s-a făcut ipoteza că două adiabate reversibile nu pot fi concurente. Această lemă necesară la alcătuirea topologică a figurii, bază a raționamentului făcut, se menționează că se poate demonstra direct din E_1 și demonstrația cunoscută ar avea deci loc logic în organizarea deductivă înainte de abordarea acestui raționament. Ea este totuși în general prezentată la analiza ciclurilor monoterme unde folosirea entropiei permite dezvoltarea unui ansamblu închegat de concluzii.

Metodologic lema aceasta dacă nu se demonstrează anticipat poate fi enunţată arătîndu-se că este demonstrată direct din E_1 la locul cuvenit.

3.2.4. *Temperatura definită termodinamic şi echivalenţa ei cu temperatura definită prin gazul perfect*

Relaţia $T_1/T_2 = Q_1/(-Q_2)$ stabilită anterior permite, după cum se ştie, definirea temperaturii ca parametru măsurabil pe cale termodinamică. Deoarece în relaţie simbolul T este simbolul din relaţia $T = Kpv$, rezultă că temperatura definită folosind ca model gazul în stare perfectă poate fi adusă la identitate cu temperatura definită termodinamic alegînd o aceeaşi valoare a temperaturii la acelaşi punct fix ca de exemplu la punctul triplu al apei $T = 273{,}160°K$.

Pe această cale *temperatura este definită complet ca parametru măsurabil în cadrul termodinamicii fenomenologice.*

Astfel **temperatura şi entropia fiind definite, cu proprietăţi stabilite, au toate elementele arbitrare folosite în structura lor compatibile cu experienţa fizică.**

Enunţul E_4 apare ca o consecinţă a principiului II conform enunţurilor E_1 şi E_2, dar pentru stabilirea lui s-a folosit şi principiul zero şi, de asemenea, existenţa unui domeniu de comparare a gazelor în care se respectă proprietăţile gazelor perfecte P_1, P_2 şi P_3.

În continuare, în partea a III-a a acestui studiu se va prezenta analiza unui sistem deductiv în care nu se mai foloseşte ipoteza existenţei fizice a gazelor în stare perfectă, consecinţele principiului II pentru corpurile de categoria B, şi în încheiere o analiză completă a relaţiilor sferelor S_1, S_2, S_3 şi S_4 a consecinţelor celor patru enunţuri.

Primită la 25 mai 1972

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de termotehnică
şi maşini termice

BIBLIOGRAFIE

1. D'Albon G., *Consideraţii asupra sistemului deductiv pentru stabilirea consecinţelor principiului al doilea în termodinamica fenomenologică* (I). Bul. Inst. polit. Iaşi, XVI (XX), *1—2*, s. IV (1970).

CONSIDÉRATIONS SUR LE SYSTÈME DÉDUCTIF DES CONSÉQUENCES DU SECOND PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE (II)

(Résumé)

En poursuivant l'analyse commencée en [1], on démontre que pour le second principe les énoncés formulés par Thomson et Clausius sont équivalents et appliquable dans tout le domaine macrophysique. On établit aussi que l'énoncé formulé par Carathéodory, de même que l'hypothèse directe de l'existence de l'entropie et de la température avec leurs propriétés, considérée comme un quatrième énoncé, sont appliquable seulement aux systèmes A, définis dans [1].

La genèse des notions de température et d'entropie est complétement analysée avec la justification des éléments arbitraires qu'elles y contienent.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C.D. 536.25; 661.92

ANOMALIE THERMIQUE JACQ DANS LA CONVECTION FORCÉE À L'AIR [1])

PAR

EMIL JUGUREANU

1. Introduction

L'anomalie thermique découverte par J. J a c q, de même que les premières explications théoriques [4], [5], ont constitué le point de départ pour un grand nombre de recherches théoriques et expérimentales, concernant l'existence du phénomène et de ses conséquences.

La chaire de thermotechnique de l'Institut Polytechnique de Jassy a continué ces recherches dans le but d'apporter de nouvelles contributions à l'explication de ce phénomène.

Dans cet ouvrage on présente des considérations théoriques concernant l'anomalie thermique Jacq dans la convection forcée à l'air.

2. L'anomalie thermique Jacq dans la convection forcée à l'air

L'image classique du champ thermique dans le cas de la transmission de la chaleur d'un fluide à un autre, à travers un mur intermédiare diffère de l'image réelle, dans laquelle il est nécessaire de tenir compte des chutes thermiques Jacq.

Dans l'hypothèse classique, la chute de température tout entière, dans la zone d'entrée Δt_i et, respectivement, dans la zone de sortie du flux thermique, Δt_r, était mise sur le compte de la convection

$$\Delta t_i = q \frac{1}{\alpha_{1\ \text{conv. classique}}}, \tag{1}$$

$$\Delta t_r = q \frac{1}{\alpha_{2\ \text{conv. classique}}}, \tag{2}$$

[1]) Présentèe lors de la session scientifique de l'Institut Polytechnique de Cluj, décembre 1969.

où q représente le flux thermique unitaire et $\alpha_{1\ \text{conv. classique}}$ et $\alpha_{2\ \text{conv. classique}}$ —les coefficients de convection.

C'est la raison pour laquelle les donnés résultées des expériences effectuées pour les coefficients de convection étaient erronées, parce qu'en réalité il y avait :

$$\Delta t_i = \Delta t_{i\ \text{conv.}} + \Delta t_{ji} = q\left(\frac{1}{\alpha_{1\ \text{conv. réel}}} + K_1\right), \tag{3}$$

$$\Delta t_r = \Delta t_{r\ \text{conv.}} + \Delta t_{jr} = q\left(\frac{1}{\alpha_{2\ \text{conv. réel}}} + K_2\right), \tag{4}$$

où $\alpha_{1\ \text{conv. réel}}$ et $\alpha_{2\ \text{conv. réel}}$ sont les coefficients de convection si on tient compte des chutes thermiques Jacq, Δt_{ji} et Δt_{jr} représentant la chute thermique dans la zone d'entrée et, respectivement, dans la zone de sortie du flux thermique.

Dans la technique expérimentale, le manque de tout moyen qui aurait pu faciliter la détermination, à grande précision, de la température à la surface d'une paroi a entraîné, assez longtemps, la persistence de cette conception erronée.

Ayant en vue que, dans les mesures effectuées jusqu'à présent visant des processus de convection, on a introduit les chutes thermiques Jacq, les valeurs obtenus pour les coefficients α de convection déterminés par les équations connues à l'heure actuelle dans la littérature, sont tout différentes par rapport aux valeurs réelles.

Par conséquent, nous avons analysé pour quelques cas concrets les valeurs des coefficients réels de convection, en tenant compte des chutes thermiques Jacq.

On a pris en étude le cas de quelques tuyaux à diamètres de valeurs divers et de matériaux aussi différents, soumis à des températures entre 50°C et 1 000°C.

Les chutes thermiques Jacq qui apparaissent dans la couche sous-superficielle de la paroi, à la sortie du flux de chaleur, contribuent à la réduction de la température réelle des parois par rapport à la température classique.

C'est ainsi que sur le côté froid, à la sortie du flux de chaleur, la température réelle de la paroi devient :

$$t_{p\ \text{ext. réel}} = t_{p\ \text{ext. classique}} - \Delta t_{jr}\ , \tag{5}$$

où $t_{p\ \text{ext. classique}}$ représente la température extérieure de la paroi, lorsqu'on ne tient pas compte de l'anomalie thermique Jacq.

Les constantes K étant déjà connues, on peut déterminer les chutes thermiques Jacq en fonction du flux thermique unitaire qui passe à travers le corps.

Pour les matériaux analysés dans cet ouvrage, les constantes ont les valeurs :

cuivre, $K = 4{,}5.10^{-4}$; aluminium, $K = 4.10^{-4}$; fer, $K = 2.10^{-4}$.

Les coefficients classiques de convection sont :

$$\alpha_{\text{conv. classique}} = \frac{q}{t_{p\,\text{ext. classique}} - t_{\text{air}}}, \quad \left[\frac{\text{Kcal}}{\text{mh}^2\,\text{grd}}\right]. \tag{6}$$

Dans le cas réel, lorsqu'il est nécessaire de tenir compte de l'existence de la chute thermique Jacq, les coefficients réels de convection sont :

$$\alpha_{\text{conv. réel}} = \frac{q}{t_{p\,\text{ext. classique}} - \Delta t_{jr} - t_{\text{air}}}, \quad \left[\frac{\text{Kcal}}{\text{mh}^2\,\text{grd}}\right], \tag{7}$$

ou

$$\alpha_{\text{conv. réel}} = \frac{q}{t_{p\,\text{ext. réel}} - t_{\text{air}}}, \quad \left[\frac{\text{Kcal}}{\text{mh}^2\,\text{grd}}\right]. \tag{8}$$

On a considéré le cas d'une convection forcée où la vitesse de l'air a les valeurs de 10 m/s et 20 m/s.

Dans les fig. 1 et 2 on voit les courbes de variation des chutes thermiques Jacq en fonction de la température de la paroi.

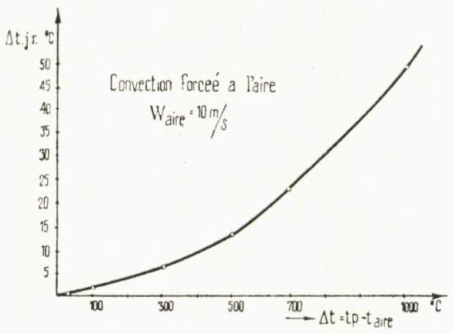


Fig. 1

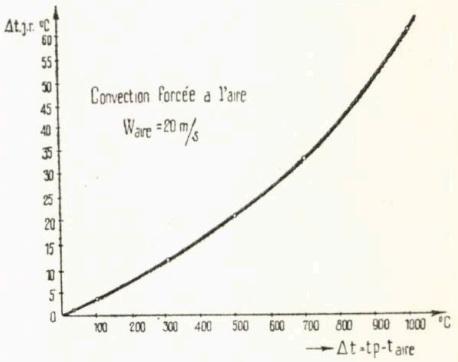


Fig. 2

Étudiant les données des fig. 3...6, on remarque que, à mesure que le flux de chaleur qui traverse le corps croit, a lieu une augmentation de la chute thermique Jacq.

Ce phénomène contribue à une plus grande différenciation entre la température réelle de la paroi et la température classique considérée jusqu'à présent.

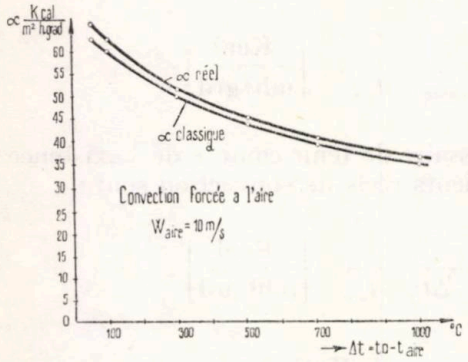


Fig. 3

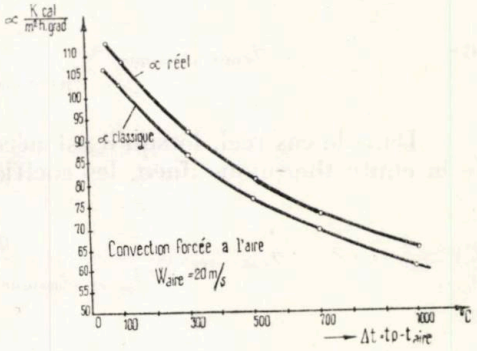


Fig. 4

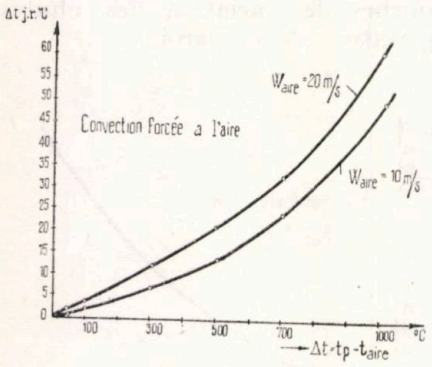


Fig. 5

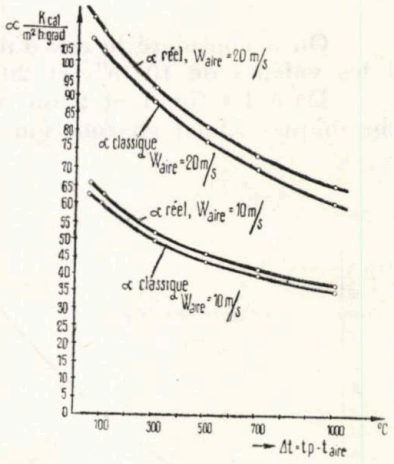


Fig. 6

3. Conclusions

Les coefficients réels de convection ont des valeurs plus grandes que les coefficients de convection calculés sans tenir compte de l'effet Jacq.

Reçue le 27 janvier 1970

Institute Polytechnique, Jassy,
Chaire de Thermotechnique et
de Machines thermiques

BIBLIOGRAPHIE

1. Jacq J., Chateau M., *Anomalie de la distribution de température dans les couches superficielles d'un solide.* C. R. Ac. Sc. Paris, **252**, *21*, 3 201—3 203 (1961).
2. Jacq J., Chateau M., *Anomalie de la distribution de température dans les couches superficielles d'un solide.* C. R. Ac. Sc. Paris, **252**, *20*, 3 011—3 013 (1961).
3. Jacq J., *Anomalie de la distribution de température dans les couches superficielles d'une paroi chauffée ou refroidie.* Journées Internationales de la Transmission de la Chaleur, Éditées par l'Institut Français des Combustibles et de l'Énergie, Paris.
4. Lucas R., *Théorie du phénomène d'anomalie de température dans les couches superficielles des matériaux.* Journées Internationales de la Transmission de la Chaleur, Éditées par l'Institut Français des Combustibles et de l'Énergie, Paris.
5. Kaiser L., *Essai d'une théorie électronique de l'effet Jacq.* Regén. de Thermiques, Paris, I, *5*, 21—40 (1962).
6. d'Albon G., Jugureanu E., Cloțan V., Lozonschi Gh., Apetrei N., *Considérations sur l'anomalie thermique Jacq et résultats expérimentaux.* Bul. Inst. polit. Iași, XV (XIX), *3—4* (1969).
7. Jugureanu E., *L'étude de l'effet Jacq par la méthode du coefficient* α. Bul. Inst. polit. Iași, XVI (XX), *1—2* s. VI (1970).

ANOMALIA TERMICĂ JACQ ÎN CONVECȚIA FORȚATĂ CU AER

(Rezumat)

Se prezintă unele considerații teoretice privind anomalia termică Jacq în convecția forțată cu aer și se studiază consecințele anomaliei termice Jacq asupra valorilor reale ale temperaturilor suprafeței unui corp, precum și valorile coeficienților de trecere a căldurii. Se determină variația căderii termice Jacq în funcție de temperatura suprafeței corpului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. D. 621.433 ; 530.17

RECHERCHES SUR LE MODELAGE PAR SIMILITUDE DES CHAMBRES DE COMBUSTION POUR LES TURBINES À GAZ FONCTIONNANT À COMBUSTIBLE GAZEUX (I)

PAR

DAN URSESCU et VICTOR ZUBCU

1. Introduction

La complexité des phénomènes qui se passent dans les chambres de combustion des turbines à gaz rend pratiquement impossible l'élaboration d'une méthode permettant de les calculer.

Parce que les expériences exécutées sur les chambres de combustion à l'échelle naturelle sont très coûteuses, pour l'étude des processus qui se passent dans les chambres de combustion et pour les projets sont fréquemment utilisés les modèles à l'échelle réduite.

Les recherches présentées dans cet article ont pour bût d'élaborer une méthode de modelage — par similitude — des chambres de combustion fonctionnant avec des combustibles gazeux.

2. Ensemble d'invariants pour le modelage des chambres de combustion pour les turbines à gaz avec combustible gazeux

L'idée fondamentale de cette recherche est d'établir un ensemble d'invariants aisémment utilisables pour les projets et pour les expériences : les invariants doivent être exprimés en fonction des paramètres qui peuvent être controlés par l'éxpérimentateur ou par le projetant.

Pour déduire l'ensemble d'invariants recherché, on peut partir des équations différentielles de M. F. Chyrocove et I. I. Semenove, qui représentent les conditions gazodynamiques et énergétiques du processus de combustion, dans l'élément de volume et dans l'unité de temps, écrites en forme tensorielle [10], [11], [3] :

a) l'équation du mouvement :

$$(1)\qquad \rho w_\beta \frac{\partial w_\beta}{\partial x_\beta} = -\frac{\partial p}{\partial x_\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left[\mu\left(\frac{\partial w_\nu}{\partial x_\beta} + \frac{\partial w_\beta}{\partial x_\nu} - \frac{2}{3}\delta_{\beta\nu}\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_\alpha}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\zeta\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_\alpha}\right);$$

b) l'équation caractéristique :

$$(2)\qquad p = \rho R T ;$$

c) l'équation de diffusion :

$$(3)\qquad \frac{\partial C_i}{\partial x_\alpha} w_\alpha - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(D_i \frac{\partial C_i}{\partial x_\alpha}\right) = \frac{\mathcal{M}_i}{\rho} ;$$

d) l'équation de l'énergie :

$$(4)\qquad \begin{aligned} \rho w_\nu c_p \frac{\partial T}{\partial x_\nu} - \rho w_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{w^2}{2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_\nu}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left[w_\beta \mu\left(\frac{\partial w_\nu}{\partial x_\beta} + \frac{\partial w_\beta}{\partial x_\nu} - \frac{2}{3}\delta_{\beta\nu}\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_\alpha}\right)\right] &+ \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(w_\beta \zeta \delta_{\beta\nu}\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_\alpha}\right) + q , \end{aligned}$$

où p, ρ, R et T ont les significations généralement connues et : w_α, w_β, w_ν — les projections de la vitesse du fluid actif sur les axes des coordonnées ; x_α, x_β, x_ν — les coordonnées du point ; c_p — chaleur spécifique à la pression constante ; μ, ζ — premier et second coefficient de viscozité ; D_i — coefficient de diffusion turbulente pour un composant du fluide actif ; C_i — concentration gravimétrique relative du même composant du fluide actif ; $\mathcal{M}_i$ — source de masse correspondante aux réactions chimiques, pour le même composant du fluide actif ; λ — coefficient de conductibilité thermique du fluide actif; q — somme algébrique des quantités d'énergie qui se dégagent par la combustion et qui partent du fluide vers l'extérieur; $\delta_{\beta\nu}$ — symbole de Kronecker.

Donc la quantité de chaleur existente dans l'élément de volume peut être écrite pour l'unité de temps :

$$(5)\qquad q = q_c \pm q_s - q_e,$$

où q_c est la chaleur qui se dégage par les réactions chimiques ; q_s — la chaleur échangée par radiation avec les autres éléments de volume ; q_e — la chaleur cédée par radiation vers l'extérieur.

Les quantités de chaleur q_c, q_s, et q_e ont la signification des quantités de chaleur spécifiques. Dans ce cas, q_e représente la charge thermique locale du tube de flamme. On peut considérer que la quantité de chaleur q_s est négligeable par rapport à q_e.

Pour les flammes des combustibles gazeux cette hypothèse est acceptable, parce que les différences de température entre les différents éléments de volume de la flamme sont plus petites que les différences de température entre les éléments respectifs et les parois du tube de flamme. D'ailleurs les échanges de chaleur entre les éléments de volume de la flamme sont réduits en raison de la valeur réduite des coefficients d'absorbtion du fluide actif.

Les différences de température dans la flamme seront plus réduites pour les grandes turbulences, et par conséquence, l'hypothèse précédente sera plus ferme pour des nombres $\mathcal{R}e$ élevés.

Si l'on introduit dans les équations différentielles (1), (2), (3) et (4) les paramètres et les coordonées adimensionneles du prototype et du modèle ($\bar{p} = p/p_0$; $\bar{p}^* = p^*/p_0^*$; ... $\bar{x} = \bar{x}/d_0$; $\bar{x}^* = x^*/d_0^*$, ou d_0 est le diamètre du tube de flamme), en considérant qu'elles doivent être respectées identiquement au modèle et au prototype, et on considère l'équation (5), on obtient un ensemble de critères de similitude exprimés en fonction des paramètres de la section de référence, dont on retient les suivants :

$$
(6)\quad \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{k_0 M_0} = \mathcal{E}u, & C_6 = (k_0 - 1)M_0\,, \\ C_2 = \dfrac{\rho_0 w_0 d_0}{\mu_0} = \mathcal{R}e, & C_7 = \dfrac{\rho_0 w_0 d_0 c_{p_0}}{\lambda_0}\,, \\ C_3 = \dfrac{\zeta_0}{\mu_0}\,, & C_{10} = \dfrac{q_{c_0} d_0}{\rho_0 c_{p_0} w_0 T_0}\,, \\ C_5 = \dfrac{\mathcal{M}_{i0} d_0}{w_0 C_{i0} \rho_0}\,, & C_{11} = \dfrac{q_{e_0} d_0}{\rho_0 c_{p_0} w_0 T_0}\,, \end{cases}
$$

où k est l'exposant adiabatique du fluide actif et M est le nombre de Mach.

On peut écrire le critère C_{10} sous une forme plus utile en pratique si l'on exprime la quantité de chaleur q_c en fonction des conditions cynétiques de la combustion :

$$
(7)\qquad q_c = \mathcal{M}_i H_i = \frac{dC}{d\tau} H_i = PZ\, e^{-\frac{E}{RT}} H_i,
$$

où pour les réactions en chaine :

$$
(8)\qquad P = K_1 p^b T^c,
$$

et Z est donné par l'équation de Jeans [7]:

$$
(9)\qquad Z = K_2 C_i C_{0_2} \rho^2 \sigma^2 T^{0,5} M_m^{-1,5},
$$

avec H_i — le pouvoir calorifique du combustible ; C_i, C_{0_2} — les concentrations gravimétriques relatives des composants qui entrent en réaction ; σ — diamètre moyen de la molécule ; M_m — poids moléculaire du mélange; K_1, K_2 — constantes.

Si le processus de combustion est au commencement, on peut considérer le produit $K_1 K_2 \sigma^2 C_i C_{0_2} M_m^{-1,5}$ comme une fonction seulement de l'excès total d'air α et, dans la section de référence, le critère C_{10} prend la forme :

$$C_{10_0} = \varphi_1(\alpha_0)\ p_0^b\ T_0^c\, e^{-\frac{E}{RT_0}} \frac{d_0 p_0^2}{R^2 c_{p_0} \rho_0 w_0 T_0^{2,5}} H_i. \tag{10}$$

Le critère C_{10} peut être considéré suffisant pour caractériser les conditions de combustion des combustibles gazeux ou pour les combustibles liquides vaporisés.

En utilisant la même suite des raisonnements, on obtient enfin pour le critère C_5 :

$$C_{5_0} = \varphi_2(\alpha_0)\ p_0^b\ T_0^c\, e^{-\frac{E}{RT_0}} \frac{d_0 p_0^2}{R^2 \rho_0 w_0 T_0^{1,5}}. \tag{11}$$

Pour le même combustible, ce critère est respecté automatiquement quand on respecte le critère C_{10}. Donc C_5 n'est pas nécessaire dans l'ensemble de critères de modelage.

Pour obtenir le critère C_{11} sous une forme générale, aisément applicable dans la pratique de modelage, on fait l'hypothèse que $q_e = q_{e_0} =$ $=$ const $=$ la valeur moyenne dans tout le volume du tube de flamme.

Cette hypothèse est valable pour les combustibles gazeux, parce que la phase de vaporisation est absente et le champ des températures est plus homogène. L'accroissement de la turbulence, donc du nombre $\mathcal{R}e$, contribue à l'agrandissement de l'uniformité du champ des températures.

Si l'on exprime q_e en fonction de la quantité de chaleur perdue en extérieur, Q_e, par le tube de flamme en ensemble, le critère C_{11} prend la forme :

$$C_{11_0} = \frac{Q_e}{K_3 d_0^2 \rho_0 w_0 c_{p_0} T_0}. \tag{12}$$

Les critères C_3, C_7, C_{10} et C_{11} peuvent être écrits en fonction du débit G_0 du fluide actif, de sorte que l'ensemble des critères de modelage prend la forme :

$$
(13)\qquad \begin{cases} \pi_1 = \dfrac{1}{k_0 M_0^2}, & \pi_7 = \dfrac{c_{p_0}}{\lambda_0}\dfrac{G_0}{d_0}, \\ \pi_2 = \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{G_0}{d_0}, & \pi_{10} = \psi(\alpha_0)\, p_0^b\, T_0^c\, e^{-\frac{E}{RT_0}} \dfrac{d_0^3 p_0^2}{c_{p_0} G_0 T_0^{2,5}} H_i, \\ \pi_3 = \dfrac{\zeta_0}{\mu_0}, & \pi_{11} = \dfrac{Q_e}{G_0 c_{p_0} T_0}. \\ \pi_6 = (k_0 - 1) M_0, & \end{cases}
$$

Le choix des paramètres p_0, w_0, T_0,... est lié au choix de la section de référence. En aval et dans la section de référence le processus qui se passe dans le tube de flamme doit être homogène du point de vue des phases qu'il contient (écoulement, mélange, combustion, échanges de chaleur et de masse). Par conséquence, la section de référence doit être placée dans une zone dans laquelle le processus de combustion a été déjà amorcé, mais qu'il soit au début, de sorte qu'il puisse être controlé par l'intermédiaire des paramètres à l'entrée dans la chambre de combustion.

Les paramètres qui peuvent être controlés par l'ingénieur projetant ou par l'expérimentateur sont : T_0, G_0, α_0 et p_0.

L'égalité de la pression p_0 et de la température T_0 conduit à l'égalité des paramètres μ_0, ζ_0, λ_0, c_{p_0}, mais elle complique les conditions expérimentales (surtout l'égalité des pressions).

Les expériences de nombreux chercheurs [13], [1], [6], ont montré que le processus d'écoulement devient indépendant du nombre $\mathcal{R}e$ (automodelage en rapport avec $\mathcal{R}e$) lorsque ce $\mathcal{R}e$ prend des valeurs élevées, et dans ce cas le nombre $\mathcal{R}e$ ne représente pas une condition pour le modelage.

Quand la température dans la chambre modèle et dans la chambre prototype est la même dans la section de référence, on peut admettre l'égalité de c_{p_0} et de k_0.

À des vitesses usuelles dans les chambres de combustion actuelles navales et terrestres, et même pour un nombre de chambre de combustion des turbomoteurs aériens, le nombre de M a c h est petit et peut être négligé.

Les invariants π_3, π_7, π_{10} ne peuvent pas être respectés simultanément. Cette situation (rencontrée d'ailleurs aussi aux autres ensembles d'invariants proposés par d'autres auteurs) est la cause principale du caractère approximatif de toutes les méthodes de modelage. C'est le rôle de l'expérience de déterminer la valeur des erreurs qui y naissent et d'établir lequel des trois invariants est le plus important pour le modelage du processus de combustion.

Si la résistance gazodynamique de la chambre de combustion est réduite, et il n'y a pas de variations brusques de pression, l'influence du coefficient ζ_0 peut être aussi négligée [12].

La condition $T_0 =$ idem est aisément réalisable en pratique. Si l'on admet que l'accroissement de la température sur le trajet entre la section d'entrée et la section de référence est la même tant au modèle qu'au prototype, quand les processus de combustion sont semblables, il est suffisant de réaliser la condition $T_a =$ idem, ou T_a est la température à l' entrée de la chambre de combustion.

La condition $p_0 =$ idem est aussi réalisable si l'on maintient $p_a =$ $=$ idem, où p_a est la pression à l'entrée de la chambre de combustion.

Quand T_0 est le même au modèle et au prototype et pour le même combustible, on obtient finallement les conditions de modelage suivantes :

$$(14)\quad \begin{cases} \text{a)} \quad T_a = T_a^*, & \text{c)} \quad \dfrac{G_0}{G_0^*} = m\left(\dfrac{p_a}{p_a^*}\right)^{2+b}, \\ \text{b)} \quad \dfrac{G_0}{G_0^*} = m\,\dfrac{\lambda_0}{\lambda_0^*}, & \text{d)} \quad \alpha_0 = \alpha_0^*, \end{cases} \qquad \text{e)} \quad \frac{Q_e}{G_0} = \frac{Q_e^*}{G_0^*},$$

où m est l'échelle du modèle : $m = d_0/d_0^*$.

Dans cet ensemble de conditions de modelage, les conditions $G/G^* =$ $= m$ (qui est une conséquence du critère de P ê c l e t , C_7) et $G/G^* = m^3$ (qui est une conséquence du critère cynétique, C_{10}) ne peuvent pas être respectées en même temps.

La valeur optime du raport G/G^* peut être écrite sous la forme

$$(15)\qquad \frac{G_0}{G_0^*} = m^x.$$

Quand le tube de flamme est muni d'orifices par lesquels entre l'air secondaire, le rapport donné par l'équation (15) doit être maintenu aussi pour les débits qui entrent par ces orifices tant au modèle qu'au prototype.

Dans cette situation on réalise aussi l'égalité :

$$(16)\qquad \frac{I}{i} = \frac{I^*}{i^*},$$

où I, i sont les quantités de mouvement du fluide actif qui passe par le tube de flamme et de l'air qui passe par les orifices de celui-ci.

On retrouve ainsi une des conditions adoptées par certains chercheurs pour le modelage froid des foyers [4].

La condition $Q_e/G =$ idem n'est pas très importante pour le modelage des chambres de combustion pour les turbines à gaz, où les pertes de chaleur sont négligeables par rapport à la quantité de chaleur qui se produit à l'intérieur.

Quand ces pertes sont importantes, par exemple dans les chambres de combustion pour les installations binaires gaz-vapeur, il est très difficile à réaliser cette condition, et elle nécessite la modification de la perméabilité thermique de la parois du tube de flamme.

Il est très probable que ces conditions de modelage peuvent être appliquées aussi pour le modelage des chambres de combustion qui travaillent avec des combustibles liquides prévaporisés. Dans ce domaine on fait aujourd'hui de nombreuses recherches [8], [9], [2], [5].

3. Conclusions

En respectant les conditions de modelage déduites ci-haut et dans la situation dans laquelle la similitude des processus de combustion est obtenue en gardant le critère C_{10}, en dehors de la similitude des champs des paramètres, les chambres modèle et prototype jouissent des propriétés suivantes :

I. Même coefficient de perfection de la combustion

$$\eta = \eta^*. \tag{17}$$

II. Dans une section quelconque, les vitesses dans la chambre modèle et la chambre prototype satisfont la relation

$$w = m\left(\frac{p_a}{p_a^*}\right)^{1+b} w^*. \tag{18}$$

III. Les coefficients de perte de pression dans les chambres de combustion modèle et prototype vérifient la relation

$$\xi^* = m^2\left(\frac{p_a}{p_a^*}\right)^{2(1+b)} \xi. \tag{19}$$

IV. Les charges thermiques spécifiques moyennes du volume du tube de flamme au modèle et au prototype sont liées par la relation

$$q_{cm} = q_{cm}^*\left(\frac{p_a}{p_a^*}\right)^{2+b}. \tag{20}$$

Quand on peut réaliser la condition p_a = idem, l'ensemble des conditions établies (14) ainsi que les relations (17)...(20) subissent des importantes simplifications.

Les recherches expérimentales ont pour but la détermination de la valeur correcte de l'exposant $\varkappa$ et aussi de la précision avec laquelle peuvent être déterminés les paramètres et les performances de la chambre prototype.

Reçue le 21 novembre 1971

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de thermotechnique
et de machines thermiques

BIBLIOGRAPHIE

1. Брискин С. Л., *О приближенной моделировании камер сгорания судовых Г.Т.У.* Судостроение, Л., 1969.
2. Hussman A., *Gasturbinen Brennkammer mit Filmferdampfung.* Wiss. Z. T. U. Dresden, **16** (1967).
3. Калинин Г. Е., *Моделирование испытания судовых турбин и машин.* Судостроение, Л., 1965.
4. Kučera I., Dundr J., *Metodika modelovani deju v ohnistich.* Strojniky casopis Vydavatelstvo Slovenskey vied Bratislava, XVIII, *2* (1961).
5. Maybach G., *The Film Vaporization Combustor for Gas Turbine Engines.* Eng. Res. Bull. Univ. Parck—Pensylvania, B—75 (1959).
6. Палеев И. И., Исерлин А. С., *О моделирование процесов газа.* Газовая промышленость, 1963.
7. Spalding D. B., *Somme Fundamentals of Combustion.* 1959.
8. Spears Esten W., *Vaporizing Manifield and Flameholder for Afterburnes.* (General Motors Corp.), Patent SUA nr. 3 23 6048, 22.02.966.
9. Sneeden R. I., *Fuel Burner Structure.* (Curtis—Wright Corp.), Patent SUA nr. 3 267 676, 23.06.965.
10. Широков М. Ф., *Физические основы газодинамики и применение её к процесами теплообмена и трения.* ГИФМЛ, М., 1958.
11. Широков М. Ф., Семенов И. И., *Бопросы теория подобии при стабилизации пламени за плохо обтекаемых телом.* Тр. лаб. двиг. Акад. Наук СССР, *4* (Теория, расчёт и испытание двигателей внутеннего сгорания). Изд. АН СССР, М., 1958.
12. Виноградов В. С., *Прикладная газовая динамика.* М., 1959.
13. Woodward E. C., *L'étude des chambres de combustion idéales par similitude.* Symposion international de combustion, New York, 1957.

CERCETĂRI ASUPRA MODELĂRII PRIN SIMILITUDINE A CAMERELOR DE ARDERE PENTRU TURBINE CU GAZE FUNCŢIONÎND CU COMBUSTIBIL GAZOS (I)

(Rezumat)

Se deduce pe cale teoretică un ansamblu de condiţii de modelare pentru camerele de ardere ale turbinelor cu gaze cu combustibili gazoşi şi se analizează posibilităţile lor de aplicare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 536.24 ; 530.17

CU PRIVIRE LA UNELE CONSECINȚE ALE INTRODUCERII RAPORTULUI CARACTERISTIC GEOMETRO-DINAMIC ÎN STUDIUL TRECERII CĂLDURII LA SUPRAFEȚE CU RUGOZITĂȚI ARTIFICIALE ȘI MICROARIPIOARE

DE

MAIER PERLMAN

1. Scopul lucrării

Datele experimentale obținute în studiul trecerii căldurii la suprafețe cu rugozități artificiale sau microaripioare sînt redate analitic, în mod obișnuit, prin familii de curbe de forma $\mathcal{N}u = f(\mathcal{R}e, \varepsilon)$. Întrucît această reprezentare îmbracă, în majoritatea cazurilor, un caracter particular se propune cu scop de generalizare, folosirea în analiza acestor procese a dependenței funcționale $\mathcal{N}u = f(\mathcal{R}e, P)$, P fiind raportul caracteristic geometro-dinamic.

Interpretarea teoretică a corelației existente între mărimile fundamentale ce caracterizează fenomenul studiat conduce la unele concluzii importante, precum și la posibilitatea stabilirii unei relații între exponenții criteriilor de similitudine din ecuațiile clasice cunoscute.

2. Considerații generale

Cu scopul de a defini o nouă posibilitate de modelare matematică a procesului de trecere a căldurii la suprafețe cu rugozități artificiale sau microaripioare, într-o lucrare anterioară [1], a fost evidențiată utilitatea folosirii, în acest scop, a raportului caracteristic geometro-dinamic exprimat prin

$$P = \frac{\Delta}{\delta}, \tag{2.1}$$

în care Δ este valoarea absolută a înălțimii proeminențelor suprafeței, δ — grosimea substratului limită laminar.

Înlocuind, pentru anumite situații, mărimea δ prin condiția la limită de speța a treia

$$\delta_c = \frac{\lambda}{\alpha},$$

s-a definit raportul caracteristic convențional

$$P_c = \frac{\Delta}{\delta_c} = \mathcal{N}u\ \varepsilon, \tag{2.2}$$

în care ε este rugozitatea relativă a suprafeței.

Prelucrarea datelor experimentale din [2] a condus la ideea că între raportul criterial $C_{\mathcal{N}u} = \mathcal{N}u/\mathcal{N}u_0$ și raportul caracteristic există o dependență funcțională, care a fost exprimată grafic în [1]. Verificarea efectuată cu ajutorul datelor din [3] a fost edificatoare în această privință.

Concluziile cele mai importante care rezultă din lucrările citate ar putea fi rezumate astfel:

a) Raportul caracteristic geometro-dinamic poate constitui, pentru analiza trecerii căldurii la suprafețe cu rugozități artificiale și microaripioare, un criteriu delimitativ determinant care prin valorile sale critice să precizeze modul de comportare al unei anumite geometrii într-un anumit regim de curgere a fluidului. În acest sens, valorile critice delimitează domeniile în care proeminențele suprafeței determină comportarea acesteia din punct de vedere termic ca o suprafață netedă, rugoasă sau cu microaripioare indicînd, în același timp, trecerea de la un domeniu la altul, inclusiv tranziția către domeniul comportării proeminențelor ca aripioare normale obișnuite.

b) Funcția $C_{\mathcal{N}u} = C_{\mathcal{N}u}(P)$ îmbracă un caracter general, determinînd, în același timp, noi posibilități de analiză și interpretare a datelor experimentale precum și definirea unor căi simplificate de calcul al schimbului de căldură în cazul analizat.

c) Valoarea raportului criterial $C_{\mathcal{N}u}$, trebuie să fie aceeași pentru toate sistemele la care raportul caracteristic geometro-dinamic are aceeași valoare. În cazul în care, pentru sistemele fizice analizate, se consideră și aceeași valoare a dimensiunii geometrice determinante l, această concluzie se poate extinde și asupra raportului coeficienților de trecere a căldurii $C_\alpha = \alpha/\alpha_0$.

Exprimată cantitativ, această concluzie capătă forma:

$$P = \text{idem} \rightarrow \begin{cases} (C_{\mathcal{N}u})_P = \text{idem}, \\ (C_\alpha)_{P,l} = \text{idem}. \end{cases}$$

3. Diagrama $\mathcal{N}u = f(\mathcal{R}e)$ pentru $P = \text{const.}$

În general reprezentarea clasică a dependenței funcționale $\mathcal{N}u = f(\mathcal{R}e)$, pentru $\varepsilon = \text{const.}$, prezintă un caracter particular, fiecare curbă fiind definită pentru un anumit interval de valori $\mathcal{R}e$, dar pentru o anumită rugozitate relativă.

Reprezentînd în coordonate dublu logaritmice ($\log \mathcal{N}u$, $\log \mathcal{R}e$) familia de curbe:

$$\mathcal{N}u = f(\mathcal{R}e, P), \tag{3.1}$$

pentru suprafețele rugoase, și curba

$$\mathcal{N}u_0 = f_0(\mathcal{R}e), \tag{3.2}$$

pentru suprafața netedă de referință, se obține o imagine cu un caracter mai general, ținînd seama de faptul că familia de curbe (3.1) este redată în regim de curgere turbulent ($\mathcal{R}e > 5\,000$) de un fascicul de drepte paralele cu dreapta (3.2).

Această afirmație este evidențiată în fig. 1, unde este reprezentată după B r u n [3], familia de curbe $\mathcal{N}u = f(\mathcal{R}e, \varepsilon)$, obținută pentru convecția forțată cu aerul în lungul unor cilindri rugoși prevăzuți pe suprafața exterioară cu proeminențe piramidale, funcția (3.2) [$\mathcal{N}u = 0{,}136 \times \times \mathcal{R}e^{0{,}65}$] pentru suprafața netedă de referință și, după calculele efectuate de autor, familia de curbe (3.1).

Relația (3.1) poate fi scrisă sub forma

$$\mathcal{N}u = \beta\, \mathcal{R}e^{p}, \tag{3.3}$$

unde p este exponentul invariantului $\mathcal{R}e$ din relația (3.2), iar β un coeficient variabil de forma $\beta = \beta(P)$. Considerînd domeniul de definiție al funcției (3.3) pentru $\mathcal{R}e > 5\,000$, coeficientul β poate fi determinat cu ușurință pornind de la observația că raportul criterial $C_{\mathcal{N}u}$ poate fi calculat prin raportul tăieturilor dreptelor respective la abscisa $\mathcal{R}e = 5\,000$. Astfel, dacă se notează prin n tăietura unei drepte din familia (3.1) și prin n_0 tăietura dreptei (3.2), rezultă $C_{\mathcal{N}u} = n/n_0$, respectiv

$$n = n_0\, C_{\mathcal{N}u}\,. \tag{3.4}$$

Cum însă funcția $C_{\mathcal{N}u}(P)$ poate fi exprimată prin relația

$$C_{\mathcal{N}u} = P^{0{,}21}, \tag{3.5}$$

dedusă în baza datelor din [1] și verifică cu ajutorul diagramei din (fig.1), relația (3.4) devine:

$$n = 0{,}136\, P^{0{,}21} = \beta, \tag{3.6}$$

iar familia de curbe (3.1) poate fi scrisă sub forma:

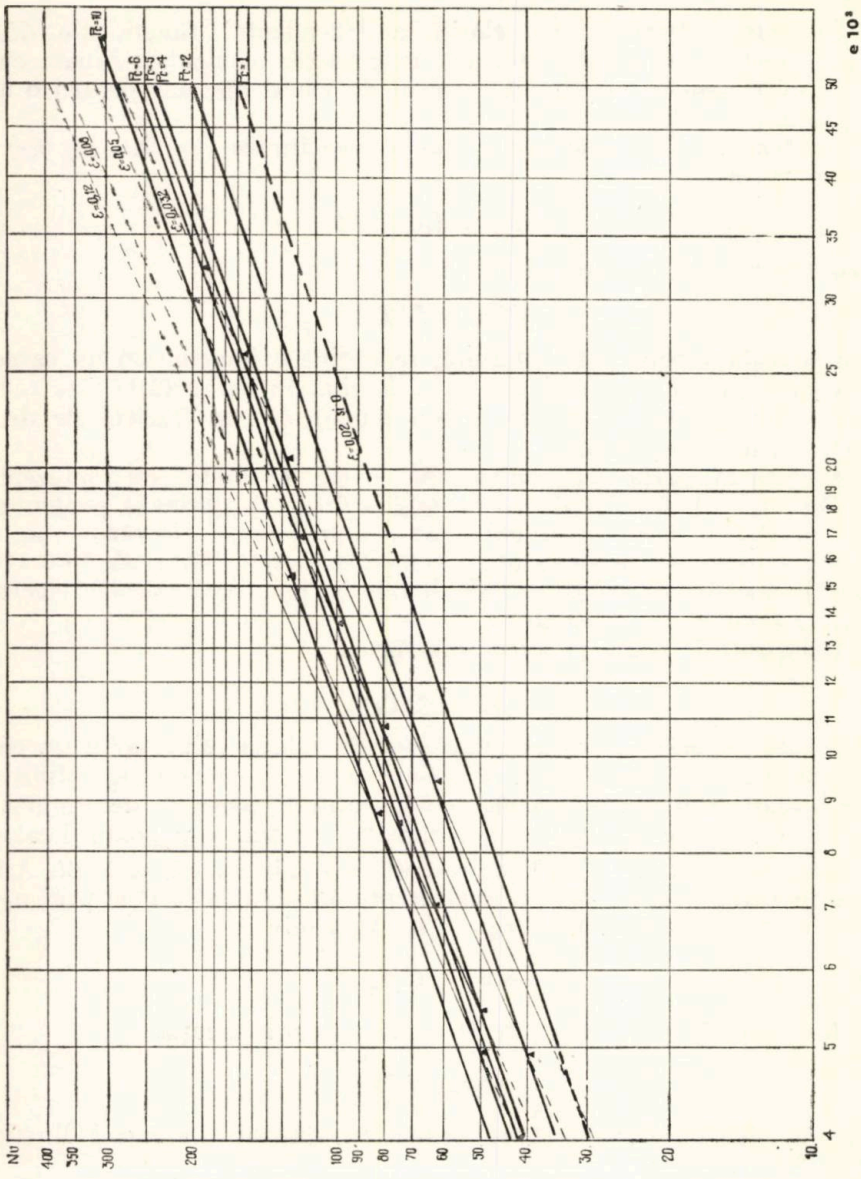

Re=10
Re=6
Re=5
Re=4
Re=2
Re=1
ε=0,02
ε=0,01
ε=0,005
ε=0,002
ε=0,001
ε=0,0005
ε=0,0002
ε=0,0001
Nu
e 10³

Fig. 1

(3.7) $$\mathcal{N}u = 0{,}136\,\mathcal{R}e^{0{,}65}\,P^{0{,}21}\,,$$

valabilă în domeniul $1 \leqslant P \leqslant 10$ și $\mathcal{R}e > 5.10^3$.

Analiza ecuației (3.7) permite cu ușurință verificarea afirmațiilor și concluziilor prezentate în § **2**.

4. Relația $f(p, m, i) = 0$

Considerînd două suprafețe rugoase notate convențional cu indicii *1* și *2*, condiția P_c = idem implică evident existența relației :

$$\mathcal{N}u_1\,\varepsilon_1 = \mathcal{N}u_2\,\varepsilon_2\,,$$

respectiv,

(4.1) $$\mathcal{R}e_1^m\,\varepsilon_1^{i+1} = \mathcal{R}e_2^m\,\varepsilon_2^{i+1}\,,$$

avînd în vedere forma ecuației criteriale generale pentru suprafețele rugoase

(4.2) $$\mathcal{N}u = C\,\mathcal{R}e^m\,\varepsilon^i\,.$$

Din relația (4.1) rezultă condiția :

(4.3) $$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \left(\frac{\mathcal{R}e_2}{\mathcal{R}e_1}\right)^{\frac{m}{i+1}}.$$

Folosind relația de definiție a raportului criterial, condiția impusă conduce la egalitatea :

(4.4) $$C_{\mathcal{N}u} = \frac{\mathcal{N}u_1}{\mathcal{N}u_{01}} = \frac{\mathcal{N}u_2}{\mathcal{N}u_{02}}\,,$$

în care $\mathcal{N}u_0 = C_0\,\mathcal{R}e^p$ reprezintă ecuația criterială generală pentru suprafața netedă de referință. Astfel egalitatea (4.4) devine

$$\frac{C\,\mathcal{R}e_1^m\,\varepsilon_1^i}{C_0\,\mathcal{R}e_1^p} = \frac{C\,\mathcal{R}e_2^m\,\varepsilon_2^i}{C_0\,\mathcal{R}e_2^p}\,,$$

de unde

(4.5) $$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \left(\frac{\mathcal{R}e_2}{\mathcal{R}e_1}\right)^{\frac{m-p}{i}}.$$

Identificarea relațiilor (4.2) și (4.3) conduce la expresia

(4.6) $$p = \frac{m}{i+1}\,, \quad \text{respectiv} \quad i = \frac{m-p}{p}\,.$$

Existența funcției (4.6) oferă posibilitatea determinării familiei de curbe $\mathcal{N}u = f(\mathcal{R}e,\ \varepsilon)$ numai pe baza cunoașterii exponentului p și a relației $\mathcal{N}u = f(\mathcal{R}e)$ pentru o singură valoare a rugozității relative ε.

Verificarea acestei relații s-a făcut folosind ecuațiile stabilite de B r u n [3] în cazul menționat, cu $\mathcal{N}u = 0{,}0425\ \mathcal{R}e^{0{,}9}\ \varepsilon^{0{,}27}$, pentru suprafața rugoasă, și $\mathcal{N}u_0 = 0{,}136\ \mathcal{R}e^{0{,}65\ldots0{,}7}$, pentru suprafața netedă.

Înlocuind valorile exponenților în (4.6), rezultă $m/(i+1) = 0{,}9/(0{,}27+1) = 0{,}708$, adică $p \simeq 0{,}7$, ceea ce confirmă ipotezele făcute.

5. Concluzii

1. Introducerea raportului caracteristic geometro-dinamic în analiza procesului de trecere a căldurii la suprafețe cu rugozități artificiale sau microaripioare facilitează definirea, din acest punct de vedere, a comportării geometriei suprafeței de schimb de căldură în diferite regimuri de curgere ale fluidului. Astfel, se propun următoarele domenii:

a) $P \leqslant 1$ suprafață netedă termic;

b) $1 < P \leqslant 3$ suprafață rugoasă (rugozități naturale sau artificiale);

c) $3 < P \leqslant 8$ microaripioare;

d) $P > 8$ aripioare.

Pentru domeniul $P > 8$, teoria relativă la suprafețele analizate în prezenta lucrare se completează cu teoria clasică pentru schimbul de căldură la suprafețe prevăzute cu aripioare.

2. Ecuația (3.7) oferă posibilitatea reprezentării generale a fenomenului de trecere a căldurii la suprafețele studiate și în același timp constituie o relație de calcul utilă proiectării și verificării aparatelor de schimb de căldură.

Utilizarea acestei relații permite impunerea, în cadrul condițiilor inițiale, a raportului criterial necesar unei situații practice date, conducînd totodată la determinarea operativă a coeficientului de trecere a căldurii pentru cazul analizat. Pe de altă parte, folosirea relației (3.7) în scopul determinării raportului criterial pentru un schimbător de căldură existent, constituie o cale de apreciere a eficienței schimbului de căldură realizat în comparație cu alte aparate similare.

3. Cunoașterea familiei de curbe (3.1) și a ecuației (3.2) oferă, de asemenea, posibilitatea stabilirii cu destulă ușurință a relației $\mathcal{N}u = f(\mathcal{R}e, \varepsilon)$ și a reprezentării grafice a acestei dependențe funcționale.

4. În sfîrșit, relația (4.6) determinată în baza ipotezelor menționate poate defini o cale nouă de generalizare a datelor experimentale și a ecuațiilor criteriale clasice care descriu aceste procese.

Primită la 29 decembrie 1971

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de termotehnică și
mașini termice

BIBLIOGRAFIE

1. Perlman M., *Asupra unei noi concepţii de modelare a procesului de trecere a căldurii la suprafeţe cu rugozităţi artificiale şi microaripioare.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XVIII (XXII), *1—2*, s. IV (1972).
2. Антуфьев В. М., *Эффективность различных форм конвективных поверхностей нагрева.* Изд. „Энергия", М.—Л., 1966.
3. Brun E. A., *Convection thermique le long de surfaces rugueuses.* I. F. C. E., Journées internationales de la transmission de la chaleur, I, 235—242 (juin 1961).

SUR QUELQUES CONSÉQUENCES DE L'INTRODUCTION DU RAPPORT CARACTÉRISTIQUE GÉOMÉTRO-DYNAMIQUE DANS L'ÉTUDE DE LA TRANSMISSION DE LA CHALEUR À DES SURFACES AVEC DES RUGOSITÉES ARTIFICIELLES OU DES MICROAILETTES

(Résumé)

Les données expérimentales obtenues dans l'étude de la transmission de la chaleur à des surfaces avec des rugosités artificielles ou des microailettes sont présentés habituellement, du point de vue analytique, par des familles de courbes de la forme $\mathcal{N}u = f(\mathcal{R}e, \varepsilon)$,

Étant donné que cette représentation reçoit, dans la plupart des cas, un caractère particulier, on propose, en vue de généralisation, l'emploi dans l'analyse de ces processus de la dépendance fonctionnelle $\mathcal{N}u = f(\mathcal{R}e, P)$, P étant le rapport caractéristique géométro-dynamique. L'interprétation théorique de la correlation existante entre les grandeurs fondamentales qui caractérisent le phénomène étudié conduit à des conclusions importantes ainsi qu'à la possibilité d'établir une relation entre les exposants des critères de similitude des équations classiques connues.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.43.04 ; 621.436

UN MODEL FIZICO-CHIMIC AL PROCESULUI DE AUTOAPRINDERE ÎN MOTOARELE DIESEL

DE

SORIN SOPA

1. Stadiul actual al cercetărilor privind procesul de autoaprindere în motoarele Diesel

Cercetările teoretice și experimentale efectuate în ultimii 10 ani [1], [2], [3], au confirmat existența unui fenomen de întîrziere la autoaprindere în motoarele cu aprindere prin compresie (Diesel). Dacă metodele de investigație bazate pe diagramele indicate nu au permis să se determine diferitele faze ale acestui proces [4], fotoînregistrările de ansamblu, cinematografierea rapidă, măsurătorile de luminiscență și cele prin șliren evidențiază apariția flăcării reci, a celei albastre și apoi a celei calde [5], corespunzătoare diferitelor stadii ale reacțiilor chimice de preaprindere.

Se poate sublinia faptul că, complexitatea fenomenelor fizice și chimice ce se desfășoară în timpul procesului de autoaprindere au împiedicat, pînă în prezent, o analiză separată a acestor două faze de o natură cu totul deosebită. Stabilirea unei granițe precise care să delimiteze aceste etape nu a fost realizată pînă în prezent, încît așa zisa durată totală a întîrzierii la autoaprindere τ_{aa}, care se compune din doi termeni conform ecuației

$$\tau_{aa} = \tau_{\text{fizic}} + \tau_{\text{chimic}} \,, \tag{1}$$

este considerată în unanimitate, de către toți autorii, numai ca un proces chimic corespunzător unei reacții în lanț pluristadiale, de oxidare lentă a hidrocarburilor. Aceasta explică în bună măsură rezultatele neconcordante ale cercetărilor experimentale de pînă acum, în care, fie că se neglijează aspectele fizice ale procesului, fie că se admit procese chimice în intervale de timp în care ele nu au loc [6], [7], precum și dificultățile în elaborarea unor relații de calcul corespunzătoare [1].

În prezenta lucrare se propune un model fizico-chimic al procesului de autoaprindere în motoarele Diesel, bazat pe un număr redus de ipoteze și care permite separarea procesului în trei faze distincte și anume : *întîrzierea fizică* la autoaprindere, *întîrzierea chimică* la autoaprindere datorită reacțiilor autocatalitice de preaprindere ce se petrec la o temperatură aproximativ constantă și *întîrzierea chimică* la autoaprindere datorită

reacţiilor exoterme de preaprindere. Se are în vedere şi elaborarea ulterioară a unui model matematic şi a unei noi metodici experimentale de cercetare.

Se subliniază că întregul raţionament se bazează pe ideea că reacţiile chimice de preaprindere pot începe abia din momentul în care s-a format aşa zisa *cantitate minimă de combustibil* vaporizat şi amestecat cu aerul.

2. Analiza fenomenelor fizice şi chimice în timpul procesului de autoaprindere în motoarele Diesel

În realizarea unui amestec combustibil în motoarele Diesel se cunoaşte metoda clasică, care se bazează pe tendinţa unei distribuţii omogene a picăturilor de combustibil în aer, denumită obişnuit şi macrodistribuţia combustibilului. Această metodă porneşte de la ideea că formarea amestecului omogen de combustibil cu aerul se poate realiza cel mai bine prin pulverizarea fină a combustibilului în aerul din camera de ardere.

Aceasta include, deci, ca primă preocupare, pulverizarea fină a combustibilului. Date fiind condiţiile de temperatură din camera de ardere, este normal ca pulverizării fine a combustibilului să-i urmeze imediat şi o vaporizare a unei cantităţi din acest combustibil injectat şi care, prin amestecarea difuză, turbulentă, cu aerul, să formeze o cantitate de amestec combustibil capabil să se autoaprindă, în urma reacţiilor de preaprindere.

Totalitatea acestor fenomene fizice formează durata fizică de întîrziere la autoaprindere şi se poate exprima prin

$$\tau_{fizic} = \tau_{pulverizare} + \tau_{vaporizare} + \tau_{amestecare} \cdot \tag{2}$$

Funcţia de distribuţie după diametrul particulelor depinde atît de construcţia sistemului de injecţie şi de condiţiile funcţionale respective, cît şi de unele proprietăţi fizice ale combustibilului (vîscozitate, tensiune superficială, presiune la saturaţie a vaporilor, greutate specifică etc.). Determinarea experimentală a acestei funcţii fiind destul de dificilă, au fost elaborate unele modele teoretice [1]. Spre exemplu, o secţiune schematizată printr-un astfel de jet de combustibil presupune o venă lichidă, compactă în centrul ei, şi picături din ce în ce mai fine la periferia jetului unde acesta vine în contact cu aerul. Durata pulverizării, $\tau_{pulverizare}$ din ecuaţia (2),s-a dovedit a fi foarte scurtă, deoarece jetul posedă chiar la intrarea sa în camera de ardere un număr suficient de picături fine şi foarte fine care să asigure dezvoltarea etapelor fizice şi chimice ce urmează.

Între picăturile de combustibil lichid şi aerul fierbinte au loc la început procese de transfer de căldură al căror efect este vaporizarea acestor picături, astfel încît macrodistribuţia lor iniţială trece într-o microdistribuţie. Viteza de vaporizare depinde de diametrul picăturilor, de temperatura aerului şi de densitatea lui, precum şi de proprietăţile respective ale combustibilului. O analiză nomografică a acestor probleme, privind durata vaporizării, este prezentată în [8], cu un accent deosebit pentru cazurile unor picături singulare.

Procesele de transfer de căldură sînt însoţite de cele de transfer de masă — amestecarea vaporilor de combustibil cu aerul — prin difuzie, astfel încît, duratele vaporizării şi difuziei sînt considerate ca avînd ponderea cea mai mare în ecuaţia (2), [4]. După obţinerea unei cantităţi de amestec combustibil în proporţii adecvate, începe cea de a doua etapă, aceea a reacţiei chimice propriu zise.

Durata proceselor de întîrziere fizică la autoaprindere, respectiv viteza unor astfel de procese, este destul de dificil de calculat sau de determinat experimental, avînd în vedere că se ia în considerare o singură picătură de combustibil, în condiţii de dinamică picătură-aer bine determinate, respectiv pentru cazurile de transfer de căldură şi masă între peliculă şi gaz în condiţiile unei mişcări turbulente a ultimului.

Evaluările făcute de diferiți autori, de exemplu [9], [10], [11], cu privire la durata fizică de întîrziere la autoaprindere variază de la neglijarea acestui termen în comparație cu τ_{chimic}, pînă la valori de milisecunde, fapt ce se poate explica și prin condițiile de lucru diferite.

Rezultă că, datorită complexității acestor fenomene fizice care sînt influențate de un număr mare de factori, deocamdată numai în parte determinați, precum și faptului că dependența dintre aceștia este încă necunoscută, nu s-a putut elabora o teorie unitară și ecuații de calcul adecvate care să descrie în mod corespunzător desfășurarea în timp a formării amestecului.

În ceea ce privește procesul de întîrziere chimică la autoaprindere, acesta se referă la pregătirea din punct de vedere chimic a amestecului de vapori de combustibil și aer, amestec ce a trecut anterior prin procesele fizice amintite mai sus. După cum arată cei mai mulți autori, [7], [12], [17], reacțiile de preaprindere pot avea loc numai în faza gazoasă a amestecului combustibil. Deoarece acesta este un amestec neomogen, atît din punct de vedere al compoziției și temperaturii cît și chiar din acela al presiunii, reacțiile de preaprindere se vor putea dezvolta diferit în spațiul corespunzător. Astfel, autoaprinderea ia naștere în focare separate (la periferia jetului de combustibil), acolo unde s-au creat în mod întîmplător cele mai avantajoase condiții pentru o rapidă accelerare autocatalitică și termică a reacțiilor de preaprindere. Dezvoltarea ulterioară a procesului de autoaprindere, după apariția primului focar de autoaprindere, este determinată de particularitățile propagării flăcării spre volumele învecinate de amestec mai puțin pregătite pentru aprindere.

Diferitele cercetări asupra autoaprinderii amestecurilor combustibile din motoare [12], [13], au demonstrat prin analize spectrografice, cromatografice și polarografice, că se formează o serie de compuși intermediari de oxidare care posedă o stabilitate chimică mai mare sau mai mică și care, în final, duc la autoaprinderea amestecului. Stadiile (etapele) acestui proces pot fi în număr de trei: flacăra rece, flacăra albastră și flacăra caldă și corespund diferiților compuși cu grade de oxidare diferită.

Această teorie a autoaprinderii polistadiale este astăzi bine fundamentată, cu toate că unele probleme de amănunt cum ar fi mecanismele de oxidare, cinetica și modul de evoluție al diferitelor etape, nu au fost încă complet lămurite.

Procesul de autoaprindere al amestecului din motor se poate aprecia că se realizează printr-un mecanism catenarotermic, deși posedă un caracter mixt. Această concluzie explică insuccesul aplicării pentru astfel de reacții a unor relații de tip Arrhenius, Semenov [14] sau Todes [2]. În astfel de cazuri, autoaprinderea poate avea loc numai la atingerea unor viteze de reacție, la care, pe lîngă accelerația autocatalitică a ramificării, mai apare o accelerație esențială datorită efectului termic al reacției sau unor cauze exterioare.

Ținînd seama de temperaturile existente în cilindrul motorului în timpul injecției și pînă la autoaprindere, se constată că acest proces chimic este o aprindere polistadială la temperaturi joase.

Ca și pentru fenomenele fizice de autoaprindere, numărul mare de variabile, cunoașterea incompletă a cineticii procesului de autoaprindere și a interacțiunii dintre combustibil și motor nu au permis elaborarea unui model și a unei metodici de calcul satisfăcătoare.

În concluzie, ecuația (1) trebuie înțeleasă în sensul că durata totală a întîrzierii la autoaprindere este o sumă a lui τ_{fizic} și τ_{chimic}. Ea este valabilă numai pentru acea cantitate de combustibil care asigură formarea primului focar de autoaprindere, cantitate de combustibil care trece succesiv prin etapele fizice și chimice amintite și astfel se delimitează clar cele două valori de timp (durate de întîrziere). Evident că aplicarea ecuației la cantitatea totală de combustibil injectat nu este posibilă, deoarece simultan cu desfășurarea reacțiilor chimice în cantitățile de combustibil

ce au trecut de etapa fizică, alte cantități de combustibil se pulverizează - - vaporizează - difuzează în aer și deci, există o suprapunere a lui τ_{fizic} și τ_{chimic} în diferitele spații ale camerei de ardere, care nu mai face posibilă delimitarea acestor durate. În acest caz, ecuația (1) își pierde valabilitatea matematică și logica fizico-chimică.

3. Asupra definiției noțiunilor utilizate în modelul fizico-chimic al autoaprinderii în motoarele Diesel

În interpretarea dată ecuației (1) pentru delimitarea precisă a celor două durate de întîrziere τ_{fizic} și τ_{chimic}, înțelese în succesiunea lor în timp, s-a vorbit despre acea *cantitate de combustibil* pentru care este valabilă această ecuație. De aceea, este necesar să se definească exact această noțiune. În acest scop se propune introducerea în modelul propus a așa zisei *cantități minime de combustibil*, prin care se înțelege cantitatea de combustibil vaporizat și amestecat cu aerul pentru formarea unui amestec omogen — vapori de combustibil și aer — absolut necesară evoluției reacțiilor chimice de preaprindere și care duc la formarea primului focar de preaprindere.

Pentru această cantitate minimă de combustibil, întîrzierea la autoaprindere va fi dată de relația:

$$\tau_{aa} = \tau_{fizic} + \tau_{chimic\ autocatalitic} + \tau_{chimic\ termic} \cdot \tag{3}$$

Suma acestor intervale de timp, care corespunde succesiunii etapelor sau fazelor prin care trece cantitatea minimă de combustibil, constituie durata la autoaprindere a acesteia. Astfel, duratele componente din ecuația (3), perfect delimitate, vor fi definite în modelul propus după cum urmează:

τ_{fizic} este durata de întîrziere fizică la autoaprindere și reprezintă timpul necesar ca din momentul începutului injecției ($\tau = 0$), să se vaporizeze și să se amestece cu aerul necesar cantitatea minimă de combustibil, obținîndu-se un amestec omogen, vapori de combustibil și aer. Formarea, cel puțin parțială, a unui amestec omogen în motoarele Diesel este confirmată de cercetările din [17].

Spre deosebire de ecuația (2), τ_{fizic} este acum

$$\tau_{fizic} = \tau_{vaporizare} + \tau_{amestecare}\ , \tag{4}$$

deoarece se poate admite că, odată cu începerea injecției, a și intrat în camera de ardere cantitatea minimă de combustibil. De altfel s-a precizat mai înainte că $\tau_{pulverizare}$ este foarte mic și deci poate fi neglijat.

$\tau_{chimic\ autocatalitic}$ reprezintă durata de întîrziere chimică provocată de autoaccelerarea unei reacții în lanț ramificate, izoterme în intervalul de timp cuprins între sfîrșitul etapei fizice de pregătire a amestecului combustibil — rezultat din cantitatea minimă de combustibil — și pînă la apariția unei degajări sensibile de căldură, deci a unor reacții exoterme, care duc la accelerarea termică a reacțiilor de preaprindere.

$\tau_{\text{chimic termic}}$ este durata de întîrziere chimică provocată prin accelerarea termică a reacției în lanț, în intervalul de timp cuprins între sfîrșitul lui $\tau_{\text{chimic autocatalitic}}$ și pînă la apariția focarului de autoaprindere în camera de ardere.

Ambele etape chimice se datoresc perioadei de inducție a unui amestec gazos și omogen combustibil—aer, adică a timpului necesar ca viteza reacțiilor de preaprindere să crească de la o valoare redusă, corespunzătoare unui număr mic de centri activi, pînă la o valoare mare, perfect determinată în momentul aprinderii.

Rezultă deci,

$$\tau_{\text{chimic}} = \tau_{\text{chimic autocatalitic}} + \tau_{\text{chimic termic}} \quad (5)$$

încît reacțiile de preaprindere se petrec după un mecanism complex, catenaro-termic.

În felul acesta, legitățile diferite care guvernează etapele procesului de autoaprindere în motorul Diesel vor putea fi exprimate printr-un model fizico-chimic unitar, înlăturîndu-se astfel principalul obstacol care a stat în calea dezvoltării teoretice a acestei probleme.

4. Ipotezele fundamentale ale modelului cu privire la autoaprinderea în motorul Diesel

Modelarea acestui proces impune introducerea unor ipoteze simplificatoare, care să permită în etapa următoare și elaborarea modelului matematic corespunzător, alegînd ca variabilă independentă timpul.

Trăsăturile esențiale ale fenomenelor care au loc în timpul întîrzierii la autoaprindere sînt următoarele: combustibilul injectat în camera de ardere vine în contact cu aerul fierbinte astfel încît între cele două gaze (sau între lichid și gaz) are loc un transfer de căldură și masă care asigură, mai întîi, formarea unei cantități minime de amestec combustibil gazos omogen, datorită fenomenelor de vaporizare și difuzie. În acest amestec gazos care a luat naștere în unul sau mai multe puncte ale camerei de ardere, fenomenele fizice sînt urmate de reacții chimice de preaprindere, asemănătoare celor din amestecul final care arde detonant în motoarele cu aprindere prin scînteie. La un moment dat, acest volum de amestec omogen se autoaprinde, producînd unul sau mai multe focare de autoaprindere, fenomen care definește sfîrșitul procesului de întîrziere la autoaprindere.

Ținînd seama de faptul că o astfel de schemă impune o delimitare precisă a celor două durate de întîrziere τ_{fizic} și τ_{chimic}, o primă ipoteză care rezultă din definiția acestor intervale de timp (vezi §3), va putea fi enunțată astfel:

1. Pentru cantitatea minimă de combustibil, capabilă să se autoaprindă, există limite bine definite ale etapelor fizice și chimice prin care rece combustibilul, astfel încît aceste etape se succed în timp, fără să existe

vreo suprapunere a fenomenelor. Evidențierea acestor granițe de separare este posibilă în baza unei metodici experimentale corespunzătoare. Prin această ipoteză se vor putea elimina și corecta, cel puțin convențional, erorile de interpretare a rezultatelor teoretice și experimentale obținute pînă în prezent și care au constituit un impediment serios în obținerea unei teorii unitare asupra procesului de autoaprindere în motoarele Diesel.

Cea de a doua ipoteză se referă la întîrzierea fizică la autoaprindere :

2. Pentru procesele fizice (pulverizare, vaporizare și difuzie), cu toate că se compun din procese de natură diferită, caracterizarea lor cantitativă se realizează cu ajutorul unei singure mărimi, și anume viteza medie a acestora bazată pe ecuații pe transfer de căldură și masă. Valoarea ei exprimă ponderea cu care intervin fenomenele fizice în condițiile de lucru și se poate determina experimental ca fiind :

$$\frac{1}{\tau_{fizic}} = W_{mediu} \cdot \tag{6}$$

Constantele ecuației vor putea fi determinate pe cale experimentală. Metoda de elaborare a unor astfel de ecuații de transfer este cunoscută în literatură [8].

Aceste ipoteze, care stau la baza proceselor fizice, sînt completate cu următoarele ipoteze privind procesele chimice :

3. Procesul chimic de autoaprindere are la bază o reacție în lanț ramificată, bistadială, într-un amestec omogen. Viteza de formare a centrilor activi se poate exprima printr-o funcție de timp similară cu cea din procesele de oxidare rapidă, deci ca și pentru arderea combustibililor. Ipoteza a fost utilizată și de alți autori cu rezultate satisfăcătoare [15].

4. Deoarece τ_{chimic} este o perioadă de inducție la parametri de stare variabili, autoaprinderea se produce în momentul în care concentrația în produse de oxidare intermediară atinge o valoare critică, respectiv atunci cînd viteza reacțiilor de preaprindere a ajuns la o valoare maximă.

5. Concluzii

Modelul fizico-chimic al procesului de autoaprindere în motoarele Diesel, care se propune, se sprijină pe un număr redus de ipoteze (patru), fundamentate teoretic și experimental. Primele două privind aspectul fizic al procesului, sînt originale, iar celelalte două se bazează pe ideea similitudinii între cinetica fenomenului de detonație în motoarele cu aprindere prin scînteie și reacțiile de preaprindere ce se desfășoară în etapa de pregătire chimică a amestecului în motorul Diesel.

Primită la 15 mai 1972

Institutul politehnic, Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. Sitkei G., *Kraftsoffaufbereutung und Verbrenung bei Dieselmotoren.* Berlin, 1964.
2. Воинов А. Н., *Процесы згорания в быстроходных поршневых двигателях.* Изд. „Мащстро", М., 1965.
3. Бодров Н. Н., Воропаи П. И., *Применение топлив и смазочных материялов.* Изд. „Недра", М., 1968.
4. Aramă C., Grünvald B., *Motoare cu ardere internă. Procese şi caracteristici.* Ed. tehn., Buc., 1966.
5. Klamman D., Fischer N., Ing. Chem. Tech., **38**, *9*, 925 (1966).
6. Yut C. a. o., SAE Transaction, **64**, 690 (1965).
7. Meurer J. S., MTZ, *27*, 131 (1966).
8. Rühle W., Chem. Ing. Tehn., *2*, 73 (1960).
9. Jost W., *Explosions und Verbrennungsvorgänge in Gasen.* 1953.
10. El Wakil M. M. a. o., SAE Transactions, *64*, 713 (1956).
11. Hurn R. W. a. o., SAE Transactions, *64*, 703 (1956).
12. Соколик А. С., *Самовоспламение, пламия и детонация в газах.* Изд. АН. СССР, 1960.
13. Воинов А. Н., *Згорание и смесеобразование в дизелях.* Изд. АН. СССР, 1960.
14. Семенов Н. Н., *О некоторых провлемах химическои кинетики и реакционнои способности.* Изд. АН СССР, 1958.
15. Peretz D., *Contribuţii la studiul fenomenului de detonaţie în n. a. s.*, Teză, Institutul politehnic din Iaşi, 1969.
16. Erdely-Gruz T. ş. a., *Chimia fizică teoretică.* Vol. II, Ed. tehn., Buc., 1958.
17. Разлетев Н. Ф., *Анализ условиях згорании в дизельных мацин с помощи уравнении для динамики згораний.* Двиг. внтр. згорания. Межвед. научно-техн. сб., *8*, 47 (1969).

A PHYSICO-CHEMICAL MODEL OF THE SELFIGNITION PROCESS IN DIESEL ENGINES

(Summary)

The paper proceeds to an analysis of the physico-chemical processes occurring a delay time for Diesel engine selfignition, in order to determine exactly the various phases of this phenomenon.

In this direction a new physico-chemical model is proposed, based upon a few theoreticaly and practicaly hypotheses. Two of them are personal and aims at establishing in time, the physical and chemical phases of the self-ignition delay, as a function of the engine actual conditions. The others two are based upon the idea of similitude between the kinetics of detonation phenomenon in spark ignition engines and the preignition reactions taking place when the mixture is chemically prepared in the compression ignition engine.

This new physico-chemical model will constitute the basis of a mathematical model which will enable the accurate computation of the phases of this phenomenon and the establishing of an exact line between the physical preparing phase and the chemical self-ignition delay in Diesel engines.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 536.8; 621.1.0

PARTICULARIZAREA EXPRESIEI GENERALE A GRADULUI DE PERFECȚIE PENTRU CICLURILE TEORETICE UZUALE

DE

EMIL GAIGINSCHI, MORITZ REICHER și MIRCEA ZUGRĂVEL

0. Introducere

Pentru particularizarea expresiilor generale ale gradului de perfecție în cazul diferitelor cicluri concrete trebuie cunoscute condițiile de particularizare.

Determinarea acestor condiții a fost expusă în lucrarea *Ciclul teoretic general al motoarelor cu ardere internă. Considerațiuni asupra expresiunilor generale ale randamentului termic și ale presiunii medii* [4, pp. 351—353].

Pentru calculul gradelor de perfecție ale ciclurilor particulare, trebuie considerate două situații:

Cazul I: $\varepsilon_i = \text{const}$ și r variabil.

În acest caz se stabilește dependența $P = f(r)$ pentru diverse valori ale lui ε_1.

Cazul II: ε_i variabil și $r = \text{const}$.

În acest caz se stabilește dependența $P = f(\varepsilon_i)$ pentru diverse valori ale lui r.

Pentru calculele de mai jos ale gradelor de perfecție ale ciclurilor particulare, s-au considerat pentru ε_i valori cuprinse între $\varepsilon_i = 3{,}246$ ($\Delta S = 0{,}0808$ kcal/kg°k) și $\varepsilon_i = 46{,}765$ ($\Delta S = 0{,}2638$ kcal/kg°K), iar pentru r, valori de la $r = 5{,}555$ pînă la $r = 10{,}416$. De asemenea, s-a considerat: $T_3 = 273 + 15 = 288°\text{K}$, iar $K = 1{,}40$.

1. Ciclul teoretic al motoarelor cu aprindere prin scînteie (fig. 1)

Pentru acest caz, condiţiile de particularizare sînt :

$$\delta_1 = 1,\ \delta_2 = 1,\ \delta_3 = \delta;\quad \varepsilon_1 = 1,\quad \varepsilon_2 = 1,\quad \varepsilon_3 = \varepsilon;$$

$$\lambda = \frac{p_5}{p_4} = \frac{p_8}{p_1} > 1. \tag{1}$$

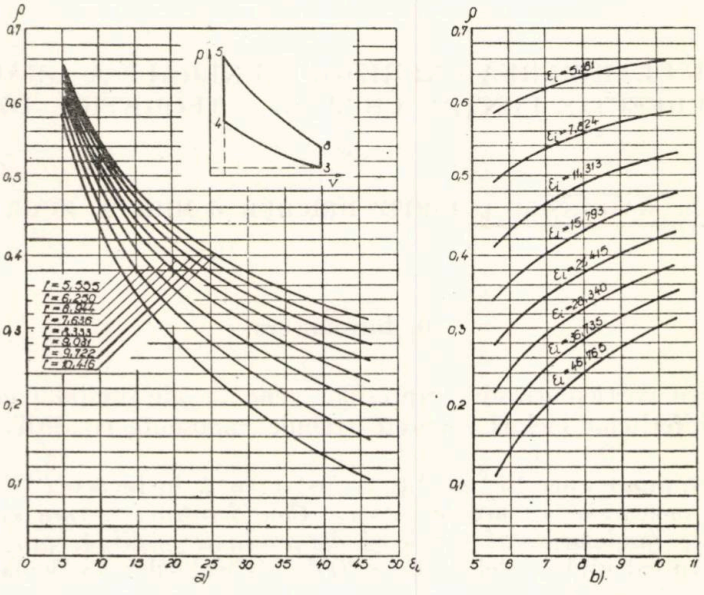


Fig. 1. — Variaţia gradului de perfecţie în cazul ciclului teoretic al motoarelor cu aprindere prin scînteie : *a* — familia de curbe $\rho = \rho(\varepsilon_i)$, la diverse valori ale lui r ; *b* — familia de curbe $\rho = \rho(r)$, la diverse valori ale lui ε_i.

Ţinînd seama de aceste condiţii, se obţine :

$$\rho_1 = \frac{(\lambda - 1)(r - \lambda)}{(r - 1)\lambda \ln \lambda}, \qquad \varepsilon_i = \lambda^{\frac{1}{k-1}}, \qquad r = \lambda\, \varepsilon^{k-1}. \tag{2}$$

Pentru cazul *I* şi *II*, valorile gradelor de perfecţie sînt date în tabelul 1, iar curbele de variaţie $\rho = f(r)$ şi $\rho = f(\varepsilon_i)$ sînt reprezentate în fig. 1 *a* şi 1 *b*.

Tabelul 1

ΔS $\frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$	ε_t	λ	T_z	1 600	1 800	2 000	2 200	2 400	2 600	2 800	3 000
			r	5,555	6,250	6,944	7,636	8,333	9,031	9,722	10,416
			$\frac{\rho_1}{\varepsilon_3}$								
0,0808	3,246	1,601		0,692 22,41	0,706 30,10	0,717 38,95	0,725 49,67	0,732 61,78	0,738 75,54	0,743 90,85	0,747 107,92
0,1129	5,181	1,931		0,583 14,03	0,603 18,84	0,618 24,52	0,630 31,09	0,640 38,68	0,648 47,28	0,654 56,85	0,660 65,57
0,1411	7,824	2,277		0,490 9,30	0,516 12,47	0,535 16,23	0,550 20,59	0,563 25,61	0,573 31,32	0,582 37,65	0,589 44,75
0,1664	11,313	2,639		0,409 6,42	0,440 8,63	0,463 11,23	0,482 14,23	0,497 17,71	0,509 21,66	0,519 26,03	0,528 30,93
0,1893	15,793	3,015		0,337 4,60	0,373 6,18	0,400 8,05	0,422 10,10	0,439 12,69	0,453 15,52	0,466 18,66	0,476 22,17
0,2102	21,415	3,406		0,272 3,39	0,312 4,88	0,343 5,93	0,367 7,52	0,387 9,37	0,404 11,44	0,417 13,76	0,429 16,35
0,2294	28,340	3,810		0,211 2,57	0,256 3,44	0,291 4,48	0,318 5,72	0,340 7,07	0,358 8,65	0,374 10,39	0,387 12,33
0,2472	36,733	4,227		0,154 1,98	0,204 2,65	0,242 3,45	0,272 4,38	0,296 5,45	0,317 6,67	0,334 8,01	0,348 9,00
0,2638	46,765	4,655		0,101 1,55	0,155 2,09	0,196 2,71	0,229 3,44	0,256 4,29	0,278 5,24	0,296 6,30	0,312 7,48

2. Ciclul teoretic al motoarelor cu aprindere prin compresie, cu regim lent și cu detentă prelungită pînă la presiunea inițială (fig. 2)

Condițiile de particularizare sînt următoarele:

$$\begin{aligned} &\delta_1 > 1, \quad \delta_2 = 1, \quad \delta_3 > 1, \quad \delta = \delta_1 \delta_3 ; \\ &\varepsilon_1 > 1, \quad \varepsilon_2 = 1, \quad \varepsilon_3 > 1, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_3 = \delta ; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\lambda = \frac{p_5}{p_4} = \frac{\delta_3^k}{\varepsilon_3^k} = 1.$$

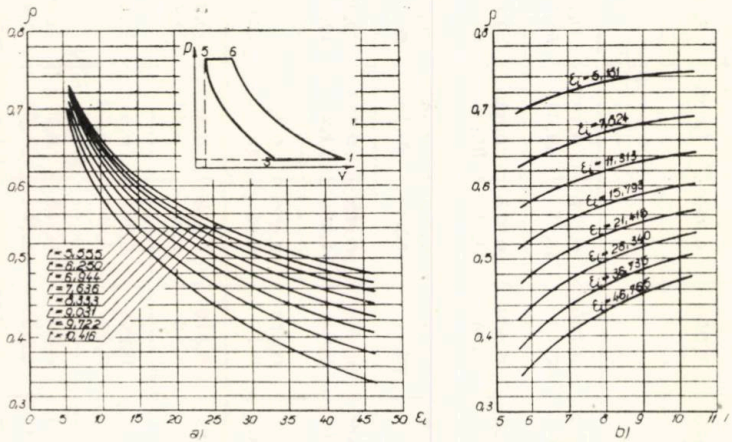


Fig. 2. — Variația gradului de perfecțiune în cazul ciclului teoretic al motoarelor cu aprindere prin compresie, cu regim lent și cu detentă prelungită pînă la presiunea inițială: *a* — familia de curbe $\rho = \rho(\varepsilon_i)$, la diverse valori ale lui r; *b* — familia de curbe $\rho = \rho(r)$, la diverse valori ale lui ε_i.

Ținînd seama de aceste condiții, se obține:

$$\rho_2 = \frac{(\delta_1 - 1)(r - \delta_1)}{(r - 1)\,\delta_1 \ln \delta_1}, \qquad \varepsilon_i = \delta^{\frac{k}{k-1}}, \qquad r = \delta_1 \varepsilon_3^{k-1}. \tag{4}$$

În cazurile *I* și *II*, valorile gradelor de perfecțiune pentru motoarele cu autoaprindere, cu regim lent și cu detentă prelungită pînă la presiunea inițială p_1, sînt date în tabelul 2, iar curbele de variație $\rho = f(r)$ și $\rho = f(\varepsilon_i)$ sînt reprezentate în fig. **2 *a*** și **2 *b***.

Tabelul

ΔS $\frac{\text{kcal}}{\text{kg°K}}$	ε_t	δ_1	T_z	1 600	1 800	2 000	2 200	2 400	2 600	2 800	3 000
			r	5,555	6,250	9,944	7,636	8,333	9,031	9,722	10,416
			$\frac{\rho_2}{\varepsilon_3}$								
0,0808	3,246	1,4		0,774 31,36	0,784 42,10	0,792 54,79	0,798 69,47	0,803 86,43	0,807 105,70	0,810 127,06	0,813 152,62
0,1129	5,181	1,6		0,693 22,46	0,707 30,15	0,717 39,24	0,726 49,74	0,733 61,90	0,738 75,66	0,743 91,00	0,747 105,67
0,1411	7,824	1,8		0,623 16,73	0,641 22,46	0,654 29,23	0,665 37,06	0,674 46,10	0,681 56,38	0,687 67,79	0,692 81,44
0,1664	11,313	2,0		0,563 12,85	0,584 17,26	0,600 22,46	0,613 28,48	0,623 35,40	0,632 43,32	0,639 52,10	0,645 61,90
0,1893	15,793	2,2		0,509 10,14	0,533 13,60	0,552 17,69	0,567 22,44	0,578 27,93	0,588 34,14	0,596 41,05	0,603 48,76
0,2102	21,415	2,4		0,461 8,14	0,489 10,94	0,509 14,23	0,526 18,05	0,539 22,46	0,550 27,47	0,559 33,03	0,567 39,24
0,2294	28,340	2,6		0,418 6,66	0,448 8,96	0,471 11,66	0,489 14,78	0,503 18,39	0,516 22,48	0,526 27,03	0,534 32,12
0,2472	36,733	2,8		0,377 5,54	0,410 7,44	0,435 9,68	0,455 12,28	0,471 15,28	0,484 18,68	0,495 22,56	0,505 26,69
0,2638	46,765	3,0		0,340 4,66	0,376 6,26	0,403 8,15	0,424 10,34	0,441 12,86	0,456 15,72	0,468 18,90	0,478 22,46

3. Ciclul teoretic al motoarelor cu aprindere prin compresie, cu regim lent (fig. 3)

Condițiile de particularizare sînt următoarele:

$$\delta_1 > 1, \quad \delta_2 = 1, \quad \delta_3 > 1, \quad \delta = \delta_1\delta_3 = \varepsilon;$$
$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = 2, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon > 1; \tag{5}$$
$$\lambda = \frac{p_5}{p_4} = 1.$$

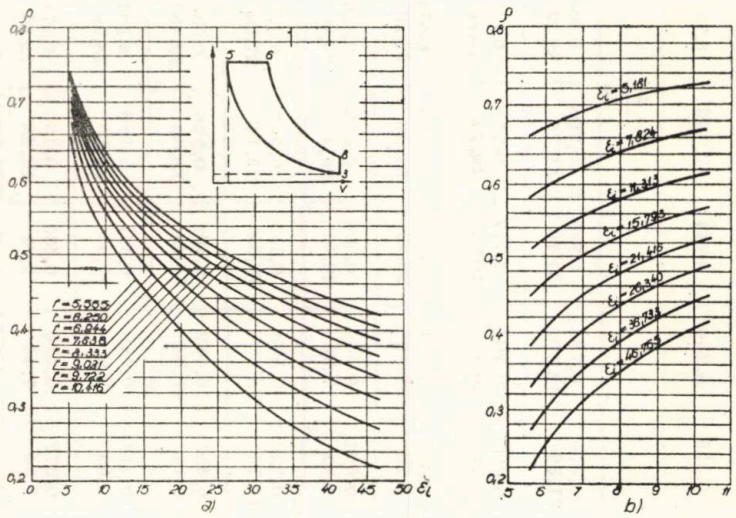


Fig. 3. — Variația gradului de perfecție în cazul ciclului teoretic al motoarelor cu aprindere prin compresie cu regim lent: *a* — familia de curbe $\rho = \rho(\varepsilon_i)$ la diverse valori ale lui r; *b* — familia de curbe $\rho = \rho(r)$, la diverse valori ale lui ε_i.

Ținînd seama de aceste condiții, rezultă:

$$\rho_3 = \frac{rk(\delta_1 - 1) - \delta_1(\delta_1^k - 1)}{(r-1)\,\delta_1 k \ln \delta_1}, \quad \varepsilon_i = \delta_1^{\frac{k}{k-1}}, \quad r = \delta_1\varepsilon^{k-1}. \tag{6}$$

Pentru cazurile *I* și *II*, valorile gradelor de perfecție sînt date în tabelul 3, iar curbele de variație $\rho = f(r)$ și $\rho = f(\varepsilon_i)$ sînt reprezentate în fig. 3 *a* și 3 *b*.

Tabelul 3

ΔS $\frac{\text{kcal}}{\text{kg°K}}$	ε_i	δ_1	T_z	1 600	1 800	2 000	2 200	2 400	2 600	2 800	3 000
			r	5,555	6,250	6,944	7,636	8,333	9,031	9,722	10,416
			$\frac{\rho_3}{\varepsilon_3}$								
0,0808	3,346	1,4		0,755 31,36	0,768 42,10	0,777 54,79	0,785 69,47	0,791 86,43	0,796 105,70	0,800 127,06	0,804 152,62
0,1129	5,181	1,6		0,662 22,46	0,680 30,15	0,694 39,24	0,705 49,74	0,714 61,90	0,721 75,66	0,727 91,00	0,732 105,67
0,1411	7,824	1,8		0,581 16,73	0,605 22,46	0,622 29,23	0,636 37,06	0,648 46,10	0,657 56,38	0,665 67,79	0,672 81,44
0,1664	11,313	2,0		0,509 12,85	0,537 17,26	0,558 22,46	0,575 28,48	0,589 35,40	0,601 43,32	0,610 52,10	0,619 61,90
0,1893	15,793	2,2		0,443 10,14	0,476 13,60	0,501 17,69	0,521 22,44	0,537 27,93	0,551 34,14	0,562 41,05	0,571 48,76
0,2102	21,415	2,4		0,382 8,14	0,419 10,94	0,448 14,23	0,471 18,05	0,489 22,46	0,505 27,47	0,518 33,03	0,529 39,24
0,2294	28,340	2,6		0,324 6,66	0,366 8,96	0,399 11,66	0,425 14,78	0,445 18,39	0,463 22,48	0,477 27,03	0,489 32,12
0,2472	36,733	2,8		0,264 5,54	0,317 7,44	0,353 9,68	0,381 12,28	0,404 15,28	0,423 18,68	0,439 22,46	0,453 26,69
0,2638	46,765	3,0		0,218 4,66	0,270 6,26	0,309 8,15	0,340 10,34	0,365 12,86	0,386 15,72	0,404 18,90	0,419 22,46

4. Ciclul teoretic al motoarelor cu aprindere prin scînteie, cu detentă prelungită pînă la presiunea inițială (fig. 4)

Condițiile de particularizare sînt acum :

$$\begin{gathered}\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = 1, \quad \delta_3 = \delta > 1 ; \\ \varepsilon_1 > 1, \quad \varepsilon_2 = 1, \quad \varepsilon_3 > 1, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_3 ; \\ \lambda = \frac{p_5}{p_4} = \frac{\delta_3^k}{\varepsilon_3^k}.\end{gathered} \tag{7}$$

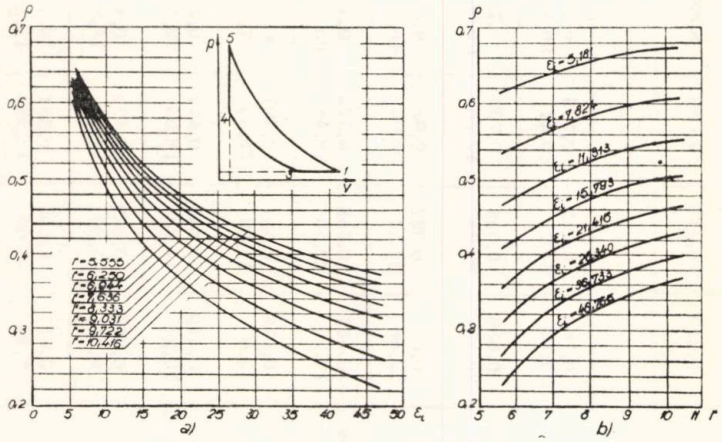


Fig. 4. — Variația gradului de perfecție în cazul ciclului teoretic al motoarelor cu aprindere prin scînteie, cu detentă prelungită : *a* — familia de curbe $\rho = \rho(\varepsilon_t)$ la diverse valori ale lui r ; *b* — familia de curbe $\rho = \rho(r)$ la diverse valori ale lui ε_t.

Avînd în vedere aceste condiții, se obține :

$$\rho_4 = \frac{r(\lambda - 1) - \lambda k(\lambda^{\frac{1}{k}} - 1)}{(r - 1)\lambda \ln \lambda}, \qquad \varepsilon_t = \lambda^{\frac{1}{k-1}}, \qquad r = \lambda \varepsilon_3^{k-1}. \tag{8}$$

Pentru cazurile *I* și *II* valorile gradelor de perfecție sînt date în tabelul 4, iar curbele de variație $\rho = f(r)$ și $\rho = f(\varepsilon_t)$ sînt reprezentate în fig. 4 *a* și 4 *b*.

Tabelul 4

ΔS $\frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$	ε_f	λ	T_z	1 600	1 800	2 000	2 200	2 400	2 600	2 800	3 000
			r	5,555	6,250	6,944	7,636	8,333	9,031	9,722	10,416
			$\frac{\rho_4}{\varepsilon_4}$								
0,0808	3,246	1,601		0,711 22,41	0,723 30,10	0,731 38,95	0,738 49,67	0,744 61,78	0,749 75,54	0,752 90,85	0,756 107,92
0,1129	5,181	1,931		0,613 14,03	0,629 18,84	0,641 24,52	0,651 31,09	0,659 38,68	0,665 47,28	0,670 56,85	0,675 67,57
0,1411	7,824	2,277		0,533 9,30	0,552 12,47	0,567 16,23	0,579 20,59	0,589 25,61	0,597 31,32	0,604 37,65	0,610 44,75
0,1664	11,313	2,639		0,464 6,42	0,487 8,63	0,505 11,23	0,519 14,23	0,530 17,71	0,540 21,66	0,548 26,03	0,555 30,93
0,1893	15,793	3,015		0,405 4,60	0,431 6,18	0,452 8,05	0,468 10,10	0,481 12,69	0,492 15,52	0,501 18,66	0,508 22,17
0,2102	21,415	3,406		0,352 3,39	0,382 4,88	0,404 5,93	0,422 7,52	0,437 9,37	0,449 11,44	0,459 13,76	0,468 16,35
0,2294	28,340	3,810		0,305 2,57	0,338 3,44	0,363 4,48	0,382 5,72	0,398 7,07	0,412 8,65	0,423 10,39	0,432 12,33
0,2472	36,733	4,227		0,262 1,98	0,298 2,65	0,325 3,45	0,346 4,38	0,364 5,45	0,378 6,67	0,390 8,01	0,400 9,00
0,2638	46,765	4,655		0,223 1,55	0,261 2,09	0,290 2,71	0,313 3,44	0,332 4,29	0,347 5,24	0,360 6,30	0,371 7,48

5. Ciclul teoretic al motoarelor cu aprindere prin compresie, cu regim rapid (fig. 5)

Condiţiile de particularizare sînt următoarele:

$$\begin{aligned} &\delta_1 > 1, \quad \delta_2 = 1, \quad \delta_3 > 1, \quad \delta = \delta_1\delta_3; \\ &\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = 1, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon = \delta_1\delta_3 = \delta; \end{aligned} \qquad \lambda = \frac{p_5}{p_4} > 1. \tag{9}$$

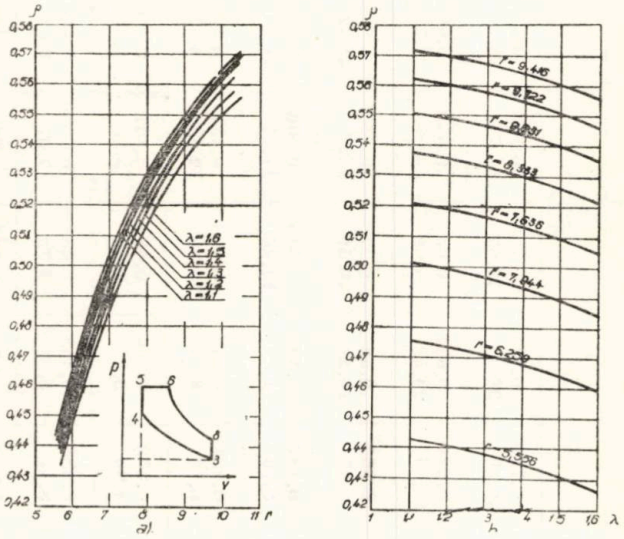


Fig. 5. — Variaţia gradului de perfecţie în cazul ciclului teoretic al motoarelor cu aprindere prin compresie, cu regim rapid: *a* — familia de curbe $\rho = \rho(r)$ la diverse valori ale lui λ; *b* — familia de curbe $\rho = \rho(\lambda)$ la diverse valori ale lui r.

Ţinînd seama de aceste condiţii, se obţine:

$$\rho_5 = \frac{r[(\lambda - 1) + \lambda k(\delta_1 - 1)] - \lambda\delta_1(\lambda\delta_1^k - 1)}{(r-1)\lambda\delta_1(\ln\lambda + k\ln\delta_1)}, \tag{10}$$

$$\varepsilon_t = \lambda^{\frac{1}{k-1}}\ \delta_1^{\frac{k}{k-1}}, \qquad r = \lambda\delta_1\varepsilon_3^{k-1}.$$

Valorile gradelor de perfecţie sînt date în tabelul 5, numai pentru $\varepsilon_t = 15{,}793$, căruia îi corespunde o variaţie de entropie de 0,189 kcal/kg°K, mărime obişnuită pentru ciclurile teoretice mixte uzuale, iar curbele de variaţie $\rho = f(r)$ pentru diverşi λ, şi $\rho = f(\lambda)$ pentru diverşi r, sînt reprezentate în fig. 5 *a* şi 5 *b*.

Tabelul 5

λ	δ_1	T_z	1 600	1 800	2 000	2 200	2 400	2 600	2 800	3 000
		r	5,555	6,250	6,944	7,636	8,333	9,031	9,722	10,416
			$\frac{\rho_5}{\varepsilon_3}$							
1,1	2,051		0,442 9,45	0,475 12,69	0,501 16,52	0,521 20,95	0,537 23,06	0,550 31,86	0,561 38,31	0,571 45,52
1,2	1,931		0,440 8,90	0,473 11,95	0,499 15,54	0,518 19,71	0,535 24,52	0,548 29,99	0,559 36,06	0,569 42,84
1,3	1,824		0,438 8,40	0,470 11,28	0,496 14,67	0,516 18,61	0,532 23,15	0,546 28,31	0,557 34,04	0,566 40,44
1,4	1,729		0,434 7,98	0,467 10,71	0,492 13,94	0,512 17,67	0,529 21,99	0,542 21,89	0,554 32,33	0,563 38,41
1,5	1,647		0,430 7,58	0,464 10,18	0,489 13,25	0,509 16,80	0,526 20,89	0,539 25,55	0,550 30,72	0,560 36,50
1,6	1,572		0,426 7,25	0,459 9,73	0,484 12,66	0,505 16,06	0,521 19,98	0,535 24,43	0,546 29,37	0,556 34,90

6. Ciclul teoretic al motoarelor cu aprindere prin compresie, cu regim rapid şi cu detentă prelungită pînă la presiunea iniţială (fig. 6)

Condiţiile de particularizare sînt următoarele :

$$\begin{aligned} &\delta_1 > 1, \quad \delta_2 = 1, \quad \delta_3 = 1, \quad \delta = \delta_1\delta_3 ; \\ &\varepsilon_1 > 1, \quad \varepsilon_2 = 1, \quad \varepsilon_3 = 1, \quad \varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_3 = \delta; \\ &\lambda = \frac{p_5}{p_4} = \frac{\delta_3^k}{\varepsilon_3^k} > 1. \end{aligned} \tag{11}$$

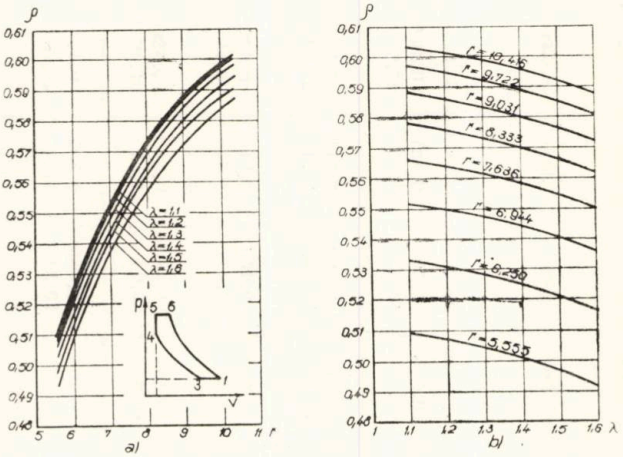


Fig. 6. — Variaţia gradului de perfecţie în cazul ciclului teoretic al motoarelor cu aprindere prin compresie, cu regim rapid şi cu detentă prelungită pînă la presiunea iniţială : *a* — familia de curbe $\rho = \rho(r)$ pentru diverse valori ale lui λ ; *b* — familia de curbe $\rho = \rho(\lambda)$ pentru diverse valori ale lui *r*.

Ţinînd seama de aceste condiţii, se obţine :

$$\rho_6 = \frac{r[(\lambda - 1) + \lambda k(\delta_1 - 1)] - \lambda\delta_1 k(\delta_1 \lambda^{\frac{1}{k}} - 1)}{(r - 1)\lambda\delta_1(\ln \lambda + k \ln \delta_1)}, \tag{12}$$

$$\varepsilon_i = \lambda^{\frac{1}{k-1}} \delta_1^{\frac{k}{k-1}}, \qquad r = \lambda\delta_1\varepsilon_3^{k-1}.$$

Valorile gradelor de perfecţie sînt date în tabelul 6, numai pentru $\varepsilon_i = 15{,}793$, căruia îi corespunde o variaţie de entropie de 0,189 kcal/kg°K, mărime obişnuită pentru ciclurile teoretice mixte uzuale, iar curbele de variaţie $\rho = f(r)$ pentru diverse valori impuse lui λ şi $\rho = f(\lambda)$ pentru diverse valori impuse lui *r* sînt reprezentate în fig. 6 *a* şi 6 *b*.

Tabelul 6

λ	δ_1	T_z	1 600	1 800	2 000	2 200	2 400	2 600	2 800	3 000
		r	5,555	6,250	6,944	7,636	8,333	9,031	9,722	10,416
			$\frac{\rho_6}{\varepsilon_3}$							
1,1	2,056		0,509 9,45	0,533 12,69	0,552 16,52	0,566 20,95	0,578 26,06	0,588 31,86	0,596 38,31	0,603 45,52
1,2	1,931		0,507 8,90	0,531 11,95	0,550 15,54	0,564 19,71	0,576 24,52	0,586 29,99	0,594 36,06	0,601 42,84
1,3	1,824		0,504 8,40	0,528 11,28	0,547 14,67	0,561 18,61	0,573 23,15	0,583 28,31	0,592 34,04	0,599 40,44
1,4	1,729		0,501 7,98	0,525 10,71	0,543 13,94	0,558 17,67	0,570 21,99	0,580 26,89	0,588 32,33	0,595 38,41
1,5	1,647		0,497 7,58	0,521 10,18	0,540 13,25	0,555 16,80	0,567 20,89	0,577 25,55	0,585 30,72	0,592 36,50
1,6	1,572		0,492 7,25	0,517 9,73	0,536 12,66	0,550 16,06	0,562 19,98	0,572 24,43	0,581 29,37	0,588 34,90

7. Concluzii

1. Din studiul datelor prezentate în tabele şi a curbelor de variaţie a gradelor de perfecţie, rezultă că gradul de perfecţie este cu atît mai mare cu cît variaţiile de entropie sînt mai mici şi cu cît temperaturile maxime sînt mai ridicate. Aceasta presupune necesitatea de a funcţiona cu valori tot mai mici ale lui λ şi δ_1 şi utilizarea concomitentă a unor rapoarte volumetrice în continuă creştere.

2. În cazul ciclurilor teoretice uzuale, pentru aceeaşi variaţie de entropie şi aceleaşi limite de temperaturi, gradul de perfecţie cel mai ridicat se înregistrează la ciclul izobar şi cel mai mic — la ciclul izochor ; pentru celelalte tipuri de cicluri uzuale, gradul de perfecţie ia valori intermediare.

Valorile gradelor de perfecţie ale ciclurilor mixte sînt cuprinse între valorile de perfecţie ale ciclurilor izobar şi izochor, avînd valori cu atît mai mari cu cît ele se apropie mai mult de ciclul izobar.

3. Deoarece raportul volumetric este o caracteristică importantă a motoarelor, în tabelele 1...4 s-au delimitat, prin linii groase, zonele ce cuprind valorile acestui raport, folosite în mod curent în motoarele reale. Aceste zone ocupă, în tabelele respective, aceeaşi poziţie, ceea ce atestă că variaţia de entropie şi limitele de temperaturi sînt parametri care permit o comparaţie justă a ciclurilor, ţinînd seama de condiţiile reale ale funcţionării motoarelor.

4. Creşterea gradului de perfecţie a ciclurilor cu aprindere prin compresie şi detentă prelungită pînă la presiunea atmosferică, este legată de posibilitatea de a funcţiona cu consumuri tot mai mici de combustibil, sub rapoarte volumetrice din ce în ce mai mari.

Primită la 8 ianuarie 1971

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de motoare termice

BIBLIOGRAFIE

1. Gaiginschi E., *Domeniul de reversibilitate a maşinilor termice. Aplicaţiile acestei noţiuni la studiul motoarelor cu ardere internă.* St. şi cerc. de energetică, *4* (1956).
2. Gaiginschi E., Reicher M. Zugrăvel M., *Expresiile generale ale temperaturilor medii, utilizate în carnotizarea ciclurilor teoretice ale motoarelor cu ardere internă.* Bul. Inst. polit. Iaşi, II (VI), *3—4*, 301—312 (1956).
3. Gaiginschi E., d'Albon G., *Utilizarea noţiunii „domeniul de reversibilitate a maşinilor termice" pentru stabilirea gradului de perfecţie a ciclurilor teoretice ale motoarelor cu ardere internă.* Bul. Inst. polit. Iaşi, I (V), *1—2*, 337—343 (1955).
4. Gaiginschi E., Cernescu V., *Ciclul teoretic general al motoarelor cu ardere internă. Consideraţiuni asupra expresiunilor generale ale randamentului termic şi ale presiunii medii.* Bul. Inst. polit. Iaşi, I (V), *1—2*, 345—361 (1955).

ПРЕВРАЩЕНИЕ ОБЩЕГО ВЫРАЖЕНИЯ ГРАДУСА СОВЕРШЕНСТВА ДЛЯ УЗУАЛЬНЫХ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ ДВИГАТЕЛЕЙ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

(Резюме)

Исходя из общего выражения градуса совершенства, определяются его частные формулы, действительные для узуальных теоретических циклов. Расчитываются значения совершенства, для различных циклов, имея в виду реальные условия работы двигателей.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. C. 538.68 ; 722.332

STATISTICAL METHODS FOR DETERMINATION THE LIGNITE COMBUSTION PARAMETERS [1])

BY

AURELIAN SIMIONESCU

1. Introduction

With a view to render valuable the lignites of this country to be burned in steam boilers furnances, mathematical relations obtained by statistical methods are presented in order to determinate the following parameters used in a thermal calculus : air quantity needed in the burning process, volume of burnt gases, partial pressure of dry three-atomic gases and water vapour.

The statistical methods have already been used in practice. Among the previous works pertaining to this subject we mention the following :

In 1968 H. Mittendorf [11] established a statistical relation between the inferior caloric power and the volume of burned gases for the refinery gas. In 1964 M. Knotek, R. Vojta and J. Sefe [8] presented a methodology for the introduction of statistical-mathematic methods in the siderurgical process analysis. The steam boiler efficiency was determined as a function of the fuel inferior caloric power, the temperature of the outgoing burnt gases and that of the cold and hot the air, excess coefficent and the thermal loading of the boiler, by R. S. Atlas and I. B. Kugelevicius [1] in 1967. M. Cârlan [4] used in 1968 the multiple correlation and the curvilinear regression in determining the duration of the work for testing some high pressure fittings in steam power plant installations. In 1968, P. P. Kutler [10] estimated the fuel consumption exceedings in central power plants by the Monte Carlo method. P. K. Serova and V. N. Dvorkin [12] in 1967, made use of the correlation function in determining the injection law for Diesel motors. In 1968, S. Worytkiewicz [17] used the regression equation to show the relation between the development of electrical installations and networks and the number of the staff attending to these. O. D. Goldberg, R. I. Talyşinskii and R. A. Isaeva [7] used in 1969 the correlating analysis to estimate the precision of control method for the entrefer in asynchronous motors. In 1968, L. A. Williams [15] made use of statistical methods in the deliveries management.

[1]) Presented at the Scientific Session of the Energetical Institute of the Academy of the Socialist Republic of Romania, May 14—16, 1969.

2. Results

In the present work the data are presented (Table 1) for 32 species of lignites originating in 14 mines as a function of the layer and place of drawing [18], [3].

Table 1

Item	Mine	Layer or place of drawing	C^1	H^1	S_v^1	O^1	N^1	U^1	A^1	Inferior caloric power	
										kcal/kg	kJ/kg
1	Ojasca	Liliac sector	25.2	2.1	2.3	9.0	0.7	43.5	17.2	2 087	8 738
		1 Mai sector	27.2	2.3	2.3	9.8	0.9	40.8	16.7	2 261	9 466
		Current product	27.5	2.3	2.5	9.8	0.7	34.5	22.7	2 328	9 747
2	Ceptura	Sector 1	28.9	2.3	2.3	10.7	0.8	36.2	18.8	2 443	10 226
		Sector 3	28.0	2.4	3.0	9.3	0.9	32.8	23.6	2 361	9 885
		Current product	30.5	2.7	3.3	10.9	0.8	31.3	20.5	2 603	10 896
3	Filipeşti de Pădure	Sector 1	21.9	1.8	1,4	8.1	0.3	40.7	25.8	1 754	7 344
		Sector 2	23.4	2.0	1.5	8.8	0.3	33.0	31.0	1 950	8 164
		Sector 4	24.5	2.0	3.9	8.5	0.5	35.3	25.3	2 045	8 562
4	Doiceşti	Sotînga product 506	30.3	2.5	0.6	12.7	0.9	37.6	15.4	2 529	10 586
		Coal-face 1 013	32.3	2.7	0.2	14.1	0.8	29.5	20.4	2 734	11 447
		Current product	27.9	2.3	0.2	12.1	0.8	36.1	20.6	2 297	9 617
5	Schitul Goleşti		33.3	2.9	0.3	13.9	0.5	32.9	16.2	2 932	1 2238
6	Cucueşti	Coal-face 1, 2, 3	33.2	3.1	0.6	14.2	0.8	33.2	14.9	2 899	12 138
		Main gallery	34.7	2.9	0.3	14.4	0.7	33.6	13.4	3 065	12 833
7	Borsec	Gallery 1	35.9	3.0	1.4	13.8	0.8	19.0	26.1	3 045	12 749
		Gallery 3	38.6	3.2	1.1	14.1	1.0	18.4	23.6	3 352	14 034
8	Sărmăşag	Sărmăşag's current product	35.3	3.0	1.3	13.4	0.7	31.8	14.6	3 028	12 678
		Chiejd current product	38.2	3.1	1.2	13.4	0.7	31.4	12.0	3 284	13 749
		Balota's current product	33.2	2.8	1.6	11.9	0.4	37.4	12.7	2 738	11 463

Item	Mine	Layer or place of drawing	C^l	H^l	S_v^l	O^l	N^l	U^l	A^l	Inferior caloric power	
										kcal/kg	kJ/kg
9	Voevozi	Varvizi's current product	24.2	2.1	2.6	10.7	0.4	39.6	20.4	2 033	8 512
		Varzari's current product	25.8	2.2	1.4	11.8	0.4	38.2	20.2	2 139	8 997
		Budoi's current product	26.7	2.5	3.1	12.8	0.4	32.6	21.9	2 382	9 973
10	Borod-Corniţel	Corniţel 1	22.6	2.1	2.7	8.8	0.3	37.0	26.5	1 912	8 005
		Corniţel 2	21.3	2.0	2.9	8.3	0.4	35.8	29.3	1 801	7 540
		Corniţel's current product	19.1	1.8	3.3	7.2	0.3	37.6	30.7	1 604	6 717
11	Valea Neagră	Horizon II	27.3	2.4	1.3	11.9	0.3	29.5	27.3	8 328	9 747
		Gallery 3	21.5	2.0	1.4	10.2	0.3	33.1	31.5	1 844	7 720
12	Sinersig		22.1	2.3	0.9	10.3	0.3	40.5	23.6	1 809	7 574
13	Caransebeş	1 May's layer	19.3	1.9	1.5	9.3	0.5	29.7	37.8	1 690	7 076
		1 May's current product	16.7	1.7	1.7	7.6	0.6	30.9	40.8	1 384	5 795
14	Cireşul		31.0	3.0	0.2	18.3	0.4	35.7	11.4	2 700	11 304

The combustion parameters are calculated by the following relations :

The theoretical air quantity needed for combustion [13], [14], [19, p. 24] :

$$(1) \qquad V_0 = 0.0889(C^l + 0{,}375\, S_v^l) + 0.265\, H^l - 0.0333\, O^l, \ [m^3/kg],$$

the real quantity of air being :

$$(2) \qquad V = \alpha V_0.$$

The volume of the burnt gases resulting from the fuel combustion was determined by the following relation [13], [14], [19, p. 24] :

$$(3) \qquad V_g = V_{CO_2} + V_{N_2} + V_{O_2} + V_{H_2O} = 1.866(C^l + 0.375\, S_v^l)/100 + 0.79\, \alpha V_0 + 0.8\, N^l/100 + 0.21\, V_0(\alpha - 1) + (9H^l + U^l + 0.1293\alpha V_0 d)/80.4,$$

[m³/kg]; the air excess coefficient α is taken between 1 and 1.8 thus allowing the evaluation of the burnt gases volume along the entire way from furnace to smoke stack, and taking into account the false air infiltrations into the installation.

The partial pressures of the dry three-atomic gases and water vapours, necessary in the calculus of the radiation heat transfer coefficient, were determined by the following relations [13], [14], [19, p. 24]:

$$p_{RO_2} = \frac{V_{RO_2}}{V_g} \quad \text{and} \quad p_{H_2O} = \frac{V_{H_2O}}{V_g}. \tag{4}$$

By analysing all the relations expressing the burning process parameters above mentioned (volume of air needed for combustion, volume of the burnt gases, partial pressures), it can be observed that all the parameters may be expressed as a function of α. Thus, the matter is essentialy to express the analytical dependence between two variables representing a certain geometrical form. As we are limitting ourselves to linear cases, we have to determine the equation of a straight line showing the dependence between two variables y and x. In mathematical statistics this straight line is called the regression line, and its equation is the following one

$$Y = ax + b, \tag{5}$$

where the quantities a and b are determined by the smallest squares method [2], [5], [6], [8], [9], [16]. We assume that knowing the independent variable values x_i, the summ of the effective values deviations y_i for the depending variable Y_i, is minimum, i. e.

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - Y_i)^2 = \min, \tag{6}$$

or

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 = \min. \tag{7}$$

By calculating the partial derivatives of function $f(a, b)$ for a and b as variables and equating these to zero, we obtain

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2\right] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial b}\left[\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2\right] = 0.$$

The following relations result:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + mb \tag{8}$$

and

Table 2

	Mine	Volume of air needed in combustion	Volume of burnt gases	Partial pressure of dry three-atomic gases, p_{RO_2}				Partial pressure of the water of vapour in the burnt gases, p_{H_2O}			
				kgf/cm²		N/m²		kgf/cm²		N/m²	
		V [m³/kg]	V_g [m³/kg]	$1.0 < \alpha < 1.3$	$1.4 < \alpha < 1.8$	$1.0 < \alpha < < 1.3$	$1.4 < \alpha < 1.8$	$1.0 < \alpha < 1.3$	$1.4 < \alpha < 1.8$	$1.0 < \alpha < 1.3$	$1.4 < \alpha < 1.8$
1	Ojasca	$2.721\ \alpha$	$2.765\ \alpha + 0{,}691$	$-0.0958\ \alpha + 0.2437$	$-0.0548\ \alpha + 0.1887$	$-9\,398\ \alpha + 23\,907$	$-5\,876\ \alpha + 18\,511$	$-0.1364\ \alpha + 0.3632$	$-0.0781\ \alpha + 0.2849$	$-13\,381\ \alpha + 35\,630$	$-7\,662\ \alpha + 27\,949$
2	Ceptura	$2.996\ \alpha$	$3.044\ \alpha + 0.633$	$-0.1015\ \alpha + 0.2540$	$-0.0572\ \alpha + 0.1946$	$-9\,957\ \alpha + 24\,917$	$-5\,611\ \alpha + 19\,090$	$-0.1232\ \alpha + 0.3238$	$-0.0691\ \alpha + 0.2512$	$-12\,086\ \alpha + 31\,765$	$-6\,777\ \alpha + 24\,643$
3	Filipești de Pădure	$2.375\ \alpha - 0.001$	$2.413\ \alpha + 0.622$	$-0.0950\ \alpha + 0.2425$	$-0.0545\ \alpha + 0.1881$	$-9\,320\ \alpha + 23\,789$	$-5\,346\ \alpha + 18\,453$	$-0.1393\ \alpha + 0.3716$	$-0.0799\ \alpha + 0.2919$	$-13\,665\ \alpha + 36\,454$	$-7\,838\ \alpha + 28\,636$
4	Doicești	$2.924\ \alpha$	$2.972\ \alpha + 0.664$	$-0.1038\ \alpha + 0.2588$	$-0.0577\ \alpha + 0.1972$	$-10\,183\ \alpha + 25\,386$	$-5\,660\ \alpha + 19\,345$	$-0.1258\ \alpha + 0.3329$	$-0.0713\ \alpha + 0.2598$	$-12\,341\ \alpha + 32\,657$	$-6\,995\ \alpha + 25\,486$
5	Schitu Golești	$3.276\ \alpha$	$3.329\ \alpha + 0{,}673$	$-0.1035\ \alpha + 0.2585$	$-0.0583\ \alpha + 0.1978$	$-10\,153\ \alpha + 25\,357$	$-5\,719\ \alpha + 19\,404$	$-0{,}1202\ \alpha + 0.3158$	$-0.0677\ \alpha + 0.2454$	$-11\,792\ \alpha + 30\,980$	$-6\,641\ \alpha + 24\,074$
6	Cucești	$3.353\ \alpha - 0.001$	$3.406\ \alpha + 0.690$	$-0.1034\ \alpha + 0.2580$	$-0.0582\ \alpha + 0.1974$	$-10\,144\ \alpha + 25\,310$	$-5\,709\ \alpha + 19\,365$	$-0.1202\ \alpha + 0.3159$	$-0.0677\ \alpha + 0.2454$	$-11\,792\ \alpha + 30\,990$	$-6\,641\ \alpha + 24\,074$
7	Borsec	$3.711\ \alpha - 0.001$	$3.770\ \alpha + 0{,}511$	$-0.1144\ \alpha + 0.2779$	$-0.0629\ \alpha + 0.2089$	$-11\,233\ \alpha + 27\,262$	$-6\,170\ \alpha + 20\,493$	$-0.0929\ \alpha + 0.2416$	$-0.0509\ \alpha + 0.1853$	$-9\,113\ \alpha + 23\,701$	$-4\,993\ \alpha + 18\,178$
8	Sălaj-Sărmășag	$3.562\ \alpha - 0.001$	$3.618\ \alpha + 0{,}679$	$-0.1050\ \alpha + 0.2606$	$-0.0588\ \alpha + 0.1987$	$-10\,301\ \alpha + 25\,565$	$-5\,766\ \alpha + 19\,492$	$-0.1156\ \alpha + 0.3028$	$-0.0647\ \alpha + 0.2346$	$-11\,340\ \alpha + 29\,705$	$-6\,347\ \alpha + 23\,014$
9	Voevozi	$2.562\ \alpha - 0.001$	$2.647\ \alpha + 0.624$	$-0.0962\ \alpha + 0.2461$	$-0.0555\ \alpha + 0.1915$	$-9\,437\ \alpha + 24\,142$	$-5\,445\ \alpha + 18\,786$	$-0.1372\ \alpha + 0.3664$	$-0.0769\ \alpha + 0.2881$	$-13\,459\ \alpha + 35\,944$	$-7\,740\ \alpha + 28\,263$
10	Borod-Cornițel	$2.220\ \alpha - 0.005$	$2.253\ \alpha + 0.628$	$-0.0906\ \alpha + 0.2331$	$-0.0523\ \alpha + 0.1817$	$-8\,888\ \alpha + 22\,867$	$-5\,131\ \alpha + 17\,825$	$-0.1468\ \alpha + 0.3939$	$-0.0850\ \alpha + 0.3109$	$-14\,401\ \alpha + 38\,642$	$-8\,339\ \alpha + 30\,499$
11	Valea Neagră	$2.430\ \alpha - 0.001$	$2.468\ \alpha + 0.593$	$-0.0982\ \alpha + 0.2490$	$-0.0560\ \alpha + 0.1924$	$-9\,633\ \alpha + 24\,427$	$-5\,499\ \alpha + 18\,874$	$-0.1334\ \alpha + 0.3545$	$-0.0763\ \alpha + 0.2779$	$-13\,087\ \alpha + 34\,777$	$-7\,485\ \alpha + 27\,262$
12	Sinersig	$2.262\ \alpha - 0.001$	$2.297\ \alpha + 0.708$	$-0.0866\ \alpha + 0.2253$	$-0.0504\ \alpha + 0.1767$	$-8\,496\ \alpha + 22\,102$	$-4\,944\ \alpha + 17\,334$	$-0.1552\ \alpha + 0.4195$	$-0.0906\ \alpha + 0.3328$	$-15\,225\ \alpha + 41\,153$	$-8\,888\ \alpha + 32\,648$
13	Caransebeș	$1.849\ \alpha$	$1.879\ \alpha + 0.541$	$-0.0901\ \alpha + 0.2327$	$-0.0522\ \alpha + 0.1817$	$-8\,839\ \alpha + 22\,828$	$-5\,121\ \alpha + 17\,825$	$-0.1484\ \alpha + 0.3991$	$-0.0860\ \alpha + 0.3154$	$-14\,558\ \alpha + 39\,152$	$-8\,437\ \alpha + 30\,941$
14	Cireșul	$2.949\ \alpha - 0.001$	$2.996\ \alpha + 0.743$	$-0.1002\ \alpha + 0.2546$	$-0.0571\ \alpha + 0.1967$	$-9\,830\ \alpha + 24\,976$	$-5\,602\ \alpha + 19\,296$	$-0.1325\ \alpha + 0.3528$	$-0.0759\ \alpha + 0.2768$	$-12\,998\ \alpha + 34\,610$	$-7\,446\ \alpha + 27\,154$

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{or} \quad b = \bar{y} - a\bar{x}, \tag{9}$$

where $\bar{x}$ and $\bar{y}$ are the arithmetical mean of the variables:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{10}$$

Substituting $b = \bar{y} - a\bar{x}$ in (5), the equation of the regression line results

$$Y - \bar{y} = a(x - \bar{x}), \tag{11}$$

where

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}. \tag{12}$$

It may be seen that the equation of the straight line can be determined when the arithmetical mean of the two variables, the regression constant a and also the number n of experiences are known.

The quantity of air needed in the combustion process, the volume of burnt gases and the partial pressures of the dry three-atomic gases and water vapour, were calculated for lignites originating in 14 mines of this country, the air excess coefficient varying by an increment of 0.1 between 1 and 1.8. With the obtained data the regression equations were then established. All the calculus were performed with the aid of the Olivetti computer „Programma 101" (Table 2).

3. Conclusion

The relations obtained by applying the statistical methods are very simple and easily handled for the thermal calculus of steam boilers, allowing the determination of the burning parameters as a function only of the air excess coefficient.

Received September 28, 1971

Academy of the Socialist Republic of Romania,
Technical Research Centre Jassy,
Section of Termoenergetics

REFERENCES

1. Атлас Р. С., Кугелевичус И. Б., Теплоэнергетика *8*, 76—78 (1967)
2. Barte Ed. M., *Statistical Methods in Engineering Experiments.* Ch. E. Merrill Books, Inc., Ohio, U. S. A., pp. 56—59, 1966.
3. Blum I., Barca Fr., *Chimia şi prepararea combustibililor solizi.* EDP, Buc., pp. 142—147, 1966.

4. Cârlan M., Energetica, **16**, *11*, 518—523 (1968).
5. Ciucu G., Craiu V., *Teoria estimaţiei şi verificarea ipotezelor statistice*. EDP, Buc., pp. 83—88, 1968.
6. Длин А. М., *Математическая статистика в технике*. Советская наука, М., стр. 237—241, 1951.
7. Голдберг О. Д., Талышинский П. И., Исаева Р. А., Электротехника, *1*, 22—26 (1969).
8. Knotek M., Vojta R., Sefc J., *Metode statistico-matematice pentru analiza proceselor siderurgice* (trad. din l. cehă). IDT, Buc., pp. 101—104, 1964.
9. Крицкий С. Н., Менкель М. Ф., Тр. Гос. гидролог. инст., *143*, 110—133 (1968).
10. Кутлер П. П., Теплоэнергетика, *8*, 71—72 (1968).
11. Mittendorf H., Brennstoff—Wärme—Kraft, **20**, *1*, 18—22 (1968).
12. Серова П. К., Дворкин В. Н., Тр. Пермский сельск. инст., **47**, 135—137 (1967).
13. Simionescu A., Bul. Inst. polit. Iaşi, **IV (VIII)**, *3—4*, 333—336 (1958).
14. Simionescu A., *Calculul arderii lignitilor în focarele cazanelor de abur* (sub tipar).
15. Williams L. A., Electronic Power, London, 319—322 (1968).
16. Worthning A. G., Geffner J., *Prelucrarea datelor experimentale* (trad. din l. engleză). Ed. tehn., Buc., pp. 223—230, 1959.
17. Worytkiewicz S., Energetyka, **XXII**, *8* (*176*), 277—280 (1968).
18. * * * *Atlasul resurselor termoenergetice ale R. S. R.* **P. II**, Institutul de energetică al Acad. R.S.R., Buc., 1961.
19. * * * *Тепловои расчет котельных агрегатов. Нормативныи метод*. Госэнергоиздат, М.—Л., 1957.

APLICAREA METODELOR STATISTICE PENTRU DETERMINAREA PARAMETRILOR DE ARDERE A LIGNIŢILOR

(Rezumat)

Se prezintă formulele obţinute prin utilizarea metodelor statistice pentru determinarea parametrilor necesari calculului termic al cazanelor de abur ce ard ligniţi şi anume : cantitatea de aer necesară arderii, volumul gazelor arse precum şi presiunea parţială a gazelor triatomice uscate şi a vaporilor de apă. Ligniţii provin de la 14 exploatări miniere, 18 mine şi 32 straturi sau locuri de prelevare din România.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia IV
MECANICĂ TEHNICĂ

D. K. 620.193

DER EINFLUSS DER DURCH EINWALZEN MIT KUGELN BILDSAMEN OBERFLÄCHENVERFORMUNG AUF DIE VERSCHLEISSFESTIGKEIT DER STÄHLE

VON

C. PICOŞ, GH. COMAN, ADRIAN CIRILLO und DRAGOŞ PARASCHIV

1. Einleitung

Das ununterbrochene Steigen der Güte der Industrieerzeugnisse bildet einen von grosser Bedeutung und aktuellen Auftrag der Maschinenbauindustrie aus unserem Lande.

Eine der hauptsächlichsten Merkmale für das Einschätzen der Güte der Industrieerzeugnisse ist ihre Betriebsdauerhaftigkeit.

Die Betriebsdauerhaftigkeit der Industrieerzeugnisse hängt massgebend von der Oberflächengüte der Konstitutiven Metallwerkstücke [1], [3], [4], [10], [11].

Die Güte der Oberflächenschicht der mechanisch verarbeiteten Metallwerkstücke, schätzt man durch die Mikrohärte, Mikrostruktur und durch die zurückbleibende Spannung ab, evalviert in Beziehung auf dieselben Kennzeichen des Grundmetalls, aus dem Inneren der Werkstücke [2], [8], [11].

Verschiedene Methoden und Arbeitsvorgänge für die mechanische Bearbeitung der Metallwerkstücke, erlauben die Erlangung einer sehr verschiedenen physisch-mechanischen Eigenschaften der Oberflächenschicht und ist unabweislich notwendig die Abhängigkeit der Betriebseingenschaften der Oberflächenschicht der Maschinenteile bezüglich auf deren physisch-mechanischen Eingenschaften zu studieren, sowie die physisch-mechanischen Eigenschaften der Oberflächenschicht in Bezug auf die bei der mechanischen Bearbeitung der Werkstücke, angewandten Methoden und Arbeitsvorgängen.

---

[1]) Mitgeteilt an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule Jassy den 2.—4. Iuli 1970.

Die Oberflächenhärtung durch Einwalzen der Metalloberflächen der Maschinenteile ist eine technologische Methode die sich in unseren Maschinenbauwerken fortlaufend erweitert, da sie das Steigen der Betriebsdauerhaftigkeit der betreffenden Werkstückoberflächen sichert.

Derart sichert die durch einwalzen der Stahlwerkstücke Oberflächenhärtung das Steigen deren Dauerfestigkeit [6] und deren Korrosionswiderstand [7].

Verschiedene experimentelle Untersuchungen zeigen dass die Oberflächenhärtung der Metallwerkstücke auch die Verschleissfestigkeit in grossem Masse beeinflusst, aber dieses Problem „ist noch nicht genügend untersucht worden "[3].

2. Die durchgeführten Untersuchungen und die erhaltenen Ergebnisse

Durch die durchgeführten Untersuchungen haben wir den Einfluss der durch einwalzen mit Kugeln Oberflächenhärtung auf die Anfangsverschleissfestigkeit (Einlaufen) der Stahlwerkstücke aus Kohlenstoffgütesthal OLC 45 (STAS 880—66) verfolgt.

Die Stahlprobekörper (aus OLC 45) sind nach der in Abb. 1 gegebenen Form und Dimensionen vorbereitet worden.

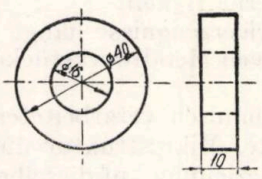


Abb. 1. — Die Form und Dimensionen der Stahlprobekörper die der Verschleissprüfung unterworfen waren.

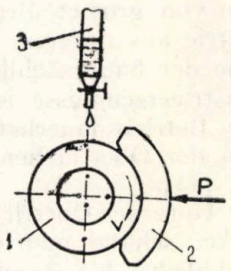


Abb. 2. — Hauptscheme der Verschleissprüfung der Probekörper.

Die Probekörper sind aus Walzstab bei einer SN-400 Normaldrehbank gedreht. Nach dem Drehen hat eine Glübehandlung gefolgt um alle Probekörper auf dieselbe Anfangsstruktur zu bringen.

Nach der Glübehandlung, sind alle Probekörper gebeizt worden und dann hat man ihnen eine Metallschicht von der Kreisoberfläche, mit einer Spantiefe von 0,5 mm, einem Vorschub von 0,1 mm/Dr und einer Spanhebegeschwindigkeit von 48 m/min, entfernt.

Nach der durch Drehen letzter Schichtentfernung, sind die Probekörper einer Kugelneinwalzungshärtung mit Hilfe einer vorherig präsentierten Vorrichtung [5], bei den in Tabelle 1 vorgezeigten Härteregime, unterworfen.

Weiterhin sind die Probekörper einem auf Grund der in Abb. 2 gezeigten Schema (*1*—einer Verschleissprüfung unterworfener Stahlprobekörper; *2* — Hemmschuh aus perlitischem Gusseisen mit einer Brinellhärte von 240 HB ; *3*— Schmiervorrichtung) Verschleissvorgang unterworfen worden.

Die Reibung, auf Grund das in Abb. 2 gezeigten Schemas, zwischen dem Stahlprobekörper und dem Gusseisenhemmschuh ist mit Hilfe einer Speziellvorrichtung, die auf Prinzip der beim Einwalzen verwendeten Vorrichtung realisiert worden ist, auf einer SN 400—Drehbank durchgeführt.

Die Reibung wurde mit einer Ölschmierung (mit Öl aus Gruppe SR 211) gemacht, die auf 40...45 Öltropfen pro Minute eingestellt war.

Alle Probekörper sind gleichem Reibungsregime mit einem, zwischen den Abwandlungsoberflächen (conjugierten), spezifischen Kontaktdruck von 100 N/mm^2 und einer peripherischen Geschwindigkeit von 38 m/min, unterworfen.

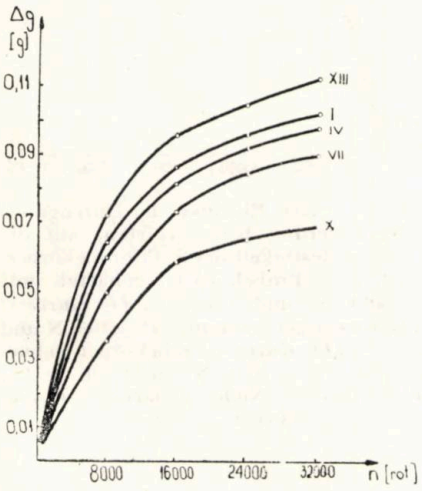


Abb. 3. — Der Einfluss der Einwalzkraftveränderung auf die Verschleissfestigkeit der Stahlprobekörper : *IKurve* — Probekörper gehärtet mit $P=400$ N und $n_{tr} = 1$; *IV Kurve* — Probekörper gehärtet mit $P = 800$ N und $n_{tr} = 1$; *VII Kurve* — Probekörper gehärtet mit $P=1\,200$ N und $n_{tr}=1$; *X Kurve* — Probekörper gehärtet mit $P = 1\,600$ N und $n_{tr} = 1$; *XIII Kurve* — Nicht gehärtete Probekörper (Zeuge).

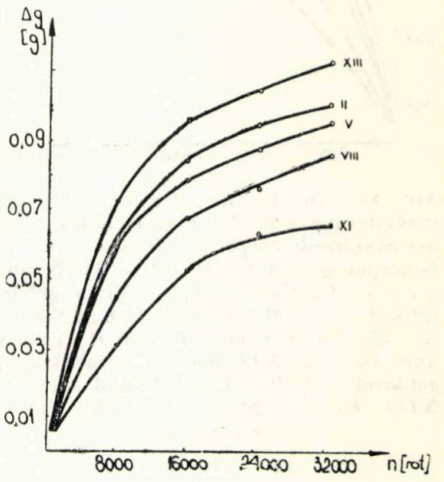


Abb. 4. — Der Einfluss der Einwalzkraftveränderung auf die Verschleissfestigkeit der Stahlprobekörper : *II Kurve*—Probekörper gehärtet mit $P=400$ N und $n_{tr} = 2$; *V Kurve* — Probekörper gehärtet mit $P = 800$ N und $n_{tr} = 2$; *VIII Kurve* — Probekörper gehärtet mit $P= 1\,200$ N und $n_{tr}=2$; *XI Kurve* —Probekörper gehärtet mit $P= 1\,600$ N und $n_{tr} = 2$; *XIII Kurve* — Nicht gehärtete Probekörper (Zeuge).

Die Verschleissgrösse wurde durch den Massenverlust der Probekörper nach 8 000 ; 16 000 ; 24 000 und bezüglich 32 000 Drehungen bestimmt. Die Genauigkeit der Probekörperabmessungen war von 0,0001 g. Die erhaltenen Werte sind in Tabelle 2 eingetragen und in Abb. 3...10 grafisch dargestellt. Die Numerierung der auf den Abbildungen gezeigten Kurven entspricht der Numerierung der eingewalzten Probekörperserie bei verschiedenen, in Tabelle 1 gegebenen, Einwalzregime.

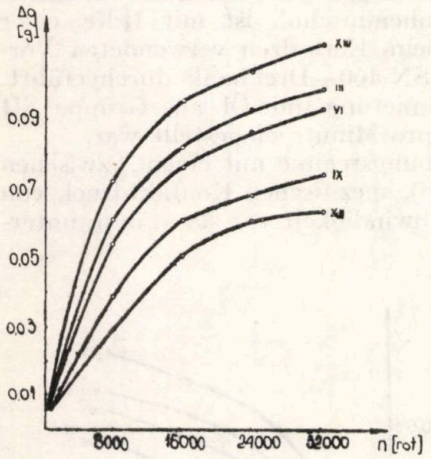


Abb. 5. — Der Einfluss der Einwalzkraftveränderung auf die Verschleissfestigkeit der Stahlprobekörper : *III Kurve* — Probekörper gehärtet mit $P = 400$ N und $n_{tr} = 3$; *VI Kurve* — Probekörper gehärtet mit $P = 800$ N und $n_{tr} = 3$; *IX Kurve* — Probekörper gehärtet mit $P = 1\,200$N und $n_{tr} = 3$; *XII Kurve* — Probekörper gehärtet mit $P = 1\,600$ N und $n_{tr} = 3$; *XIII Kurve* — Nicht gehärtete Probekörper (Zeuge).

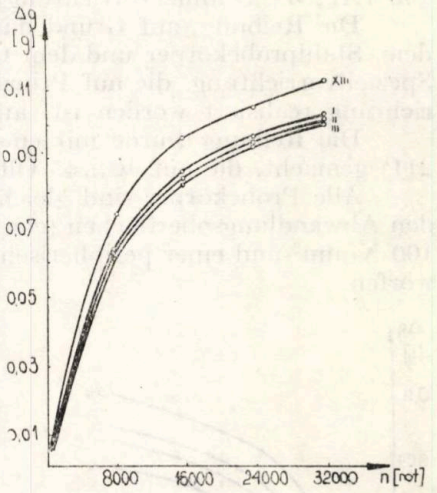


Abb. 6. — Der Einfluss der Durchgangszahlveränderung beim Härten, auf die Verschleissfestigkeit der Stahlprobekörper: *I Kurve* — Probekörper gehärtet mit $P = 400$ N und $n_{tr} = 1$; *II Kurve* — Probekörper gehärtet mit $P = 400$ N und $n_{tr} = 2$; *III Kurve* — Probekörper gehärtet mit $P = 400$ N und $n_{tr} = 3$; *XIII Kurve* — Nicht gehärtete Probekörper (Zeuge).

Die in Tabelle 2 enthaltenen Werte stellen das arithmetische Mittel, der bei 5...10 ausgeführten Proben dar, nachdem die mit grossen Fehler Betrachteten Werte ausgeschieden wurden.

3. Schlussfolgerungen

1. Das Steigen des Oberflächenhärtungsgrad der Probekörper, durch vergrössern der Einwalzkraft, hat zu einem Wachsen der Anfangsverschleissfestigkeit der versuchten Probekörper, geführt (Abb. 3...5).

Tabelle 1

Regime für die durch Kugeleinwalzen Oberflächenhärtung

Seriennummer der Probekörper*)	Einwalzkraft P N	Einwalzvorschub s mm/Dr	Einwalzdurchgangszahl n_{tr}
I	400	0,1	1
II	400	0,1	2
III	400	0,1	3
IV	800	0,1	1
V	800	0,1	2
VI	800	0,1	3
VII	1 200	0,1	1
VIII	1 200	0,1	2
IX	1 200	0,1	3
X	1 600	0,1	1
XI	1 600	0,1	2
XII	1 600	0,1	3
XIII	Nicht eingewalzte Probekörper		

*) Jede Serie enthält je 10 Probekörper.

Abb. 7. — Der Einfluss der Durchgangszahlveränderung beim Härten, auf die Verschleissfestigkeit der Stahlprobekörper: *IV Kurve* — Probekörper gehärtet mit $P = 800$ N und $n_{tr} = 1$; *V Kurve* — Probekörper gehärtet mit $P = 800$ N und $n_{tr} = 2$; *VI Kurve* — Probekörper gehärtet mit $P = 800$ N und $n_{tr} = 3$; *XIII Kurve* — Nicht gehärtete Probekörper (Zeuge).

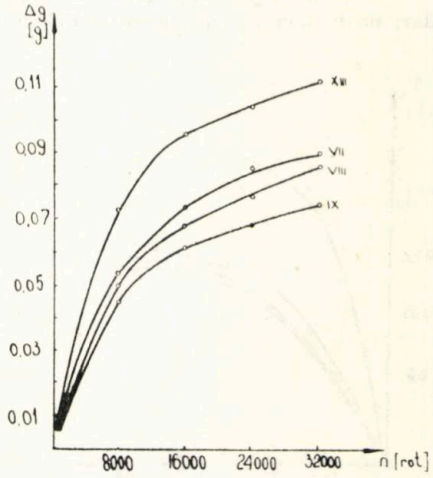


Abb. 8. — Der Einfluss der Durchgangszahlveränderung beim Härten, auf die Verschleissfestigkeit der Stahlprobekörper: *VII Kurve* — Probekörper gehärtet mit $P = 1\,200$ N und $n_{tr} = 1$; *VIII Kurve* — Probekörper gehärtet mit $P = 1\,200$ N und $n_{tr} = 2$; *IX Kurve* — Probekörper gehärtet mit $P = 1\,200$ N und $n_{tr} = 3$; *XIII Kurve* — Nichtgehärtete Probekörper (Zeuge).

Tabelle 2

Massenverlust der versuchten Probekörper, in Abhängigkeit der Härteregime *)

Seriennummer der Probekörper	Massenwerlust (g)			
	Reibungsdrehzahl			
	8 000	16 000	24 000	32 000
I	0,06410	0,08622	0,09556	0,10142
II	0,06219	0,08397	0,09419	0,09953
III	0,06136	0,08239	0,09283	0,09838
IV	0,06041	0,08194	0,09238	0,09758
V	0,05493	0,07854	0,08729	0,09456
VI	0,05394	0,07683	0,08653	0,09263
VII	0,04963	0,07298	0,08453	0,08951
VIII	0,04514	0,06752	0,07832	0,08553
IX	0,03953	0,06143	0,06836	0,07419
X	0,03641	0,05819	0,06563	0,06944
XI	0,03145	0,05254	0,06314	0,06617
XII	0,02987	0,05142	0,06153	0,06354
XIII	0,07212	0,09546	0,10368	0,11106

*) Die eigetragen Werte stellen Durchschnittswerte von 5...10 Elementarproben dar, noch dem die mit grossen Fehler betrachteten Werte ausgeschieden wurden.

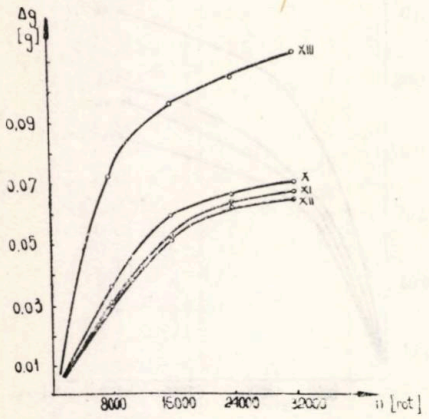


Abb. 9. — Der Einfluss der Durchgangszahlveränderung beim Härten, auf die Verschleifestigkeit der Stahlprobekörper: *X Kurve* — Probekörper gehärtet mit $P = 1\,600$ N und $n_{tr} = 1$; *XI Kurve* — Probekörper gehärtet mit $P = 1\,600$ N und $n_{tr} = 2$; *XII Kurve* — Probekörper gehärtet mit $P = 1\,600$ N und $n_{tr} = 3$; *XIII Kurve* — Nichtgehärtete Probekörper (Zeuge).

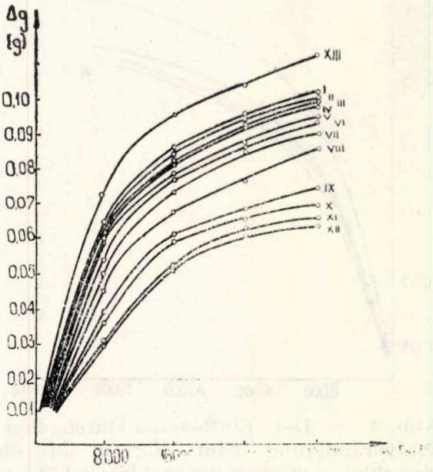


Abb. 10. — Der gleichzeitige Einfluss der Einwalzkraft und Durchgangszahlveränderung, auf die Verschleissfestigkeit der Stahlprobekörper.

2. Das Steigen des Oberflächenhärtungsgrad der Probekörper hat, durch ansteigen der Durchgangszahl beim Einwalzen, zur Erhöhung der Anfangsverschleissfestigkeit der versuchten Probekörper geführt (Abb. 6...9).

3. Das Steigen der Einwalzkraft mit 100 N beeinflusst das Härtungsgrad und die Verschleissfestigkeit, der versuchten Probekörper, stärker als das Steigen der Durchgangszahl beim Einwalzen von 1 auf 3 (Abb. 10).

4. Die Oberflächenhärtung und das Steigen der Anfangsverschleissfestigkeit der Probekörper, machen dass die Aplatisierung der Verschleisskurven für den Normalverschleissbereich bei einem kleineren Werkstoffverlust als in dem Fall der nicht gehärteten Probekörper auftritt (die Kurve *XIII* auf den Abbildungen); Tatsache die das Aufrechterhalten in beschränkteren Grenzen des Anfangscharakters der Bohrung beeinflusst.

5. Der Einfluss der Oberflächenhärtung, nur bei dem Anfangsverschleisst der Oberflächen, erklärt sich dadurch, dass die Oberflächen der conjugierten Werkstücke, nach dem Anfangsverschleiss bei physich-mechanischen Optimaleigenschaften gelangen, die spezifisch den betrefenden Betriebsbedingungen sind. In folgedessen erreichen die Mikrostruktur der Oberflächenschicht Werte, die spezifisch den Betriebsbedingungen nach dem Anfangsverschleiss sind.

6. Das Steigen der Anfangsverschleissfestigkeit (beim Einlaufen) der oberflächlich gehärteten Probekörper, muss auch auf Rechenschaft der Oberflächengüteverbesserung, hinsichtlich auf ihre Mikrogeometrie, getan werden.

Eingegangen am 26. Februar 1971

Technische Hachschule, Jassy,
Lehrstuhl der Technologie
des Maschinenbau

LITERATURVERZEICHNIS

1. Cayère l'Abbé, *Métrologie des états de surface.* La Machine Moderne, 624 (1961).
2. Crudu I., *Contribuţiuni la studiul influenţei tensiunilor normale iniţiale asupra distrugerii statice şi prin ciupitură (pitting) a contactelor punctiforme.* Teză, Institutul politehnic Iaşi, 1969.
3. Патчюк А. Й., *Износ одкатанных поверхностей.* In „Учрочнение деталей машин механическим наклепыванием", Изд., „Наука", М, 1965.
4. Negrescu T., *Preocupări de viitor în metalurgia fizică.* St. şi cerc. de metalurgie, VI, *2* (1961).
5. Picoş C. ş. a., *Asupra durificării superficiale a metalelor prin rulare cu bile.* Bul. Inst. polit., Iaşi, IX (XIII), *1—2* (1963).
6. Picoş C. ş. a., *Influenţa deformării plastice superficiale cu bile asupra rezistenţei la oboseală.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XIV (XVIII), *3—4* (1968).
7. Picoş C. u. m., *Der Einfluss der durch Einwalzen mit Kugeln Oberflächenhärtung, auf den Korrosionswiderstand der Stähle.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XVII (XXI), *3—4* (1971).
8. Picoş C. ş. a., *Tehnologia construcţiei maşinilor-unelte.* Tipar-rotaprint, Institutul politehnic Iaşi, 1970.
9. Rancu N. ş. a., *Statistică matematică cu aplicaţii în producţie.* Ed. Acad. RPR, Buc., 1963.
10. Vasilica Gh. ş. a., *Procese de lubrificaţie, frecare şi uzură la suprafeţele metalice.* Ed. Acad. RSR, Buc., 1967.

INFLUENŢA DEFORMĂRII PLASTICE SUPERFICIALE PRIN RULARE CU BILE ASUPRA REZISTENŢEI LA UZURĂ A OŢELURILOR

(Rezumat)

Se prezintă rezultatele cercetărilor efectuate privind influenţa deformaţiilor plastice superficiale, obţinute prin rulare cu bile, ale pieselor din oţel OLC 45 (STAS 880—66) asupra rezistenţei la uzura de rodaj. Cercetările s-au efectuat pe epruvete ale căror dimensiuni sînt prezentate în fig. 1, metodica de încercare fiind prezentată în fig. 2. Regimurile de durificare sînt specificate în tabelul 1.

Rezultatele obţinute, prezentate în tabelul 2 şi fig. 3...10, conduc la concluzia generală că mărirea gradului de durificare superficială a pieselor din oţel duce la creşterea rezistenţei lor la uzura de rodaj.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.9

RECTIFICAREA CILINDRO-HIPERBOLICĂ[1])

DE

VITALIE BELOUS

Din studiul teoretico-experimental al noilor procedee de rectificare a fețelor de așezare ale sculelor așchietoare [1], [2], a rezultat posibilitatea realizării, printr-o cinematică simplificată, și a suprafețelor cilindro-hiperbolice, în particular a suprafețelor detalonate ale sculelor așchietoare profilate cu profil rectiliniu.

Conform noului procedeu [2], drept suprafață activă se folosește o suprafață hiperboloidală de rotație cu o pînză *1* (fig. 1) generată prin compunerea mișcării principale de rotație *A* a pietrei oală *2*, cu mișcarea de avans longitudinal rectiliniu *B* a unui vîrf de diamant *3*, excentric cu o distanță c_1 în raport cu axa pietrei și cu o distanță c_2 în raport cu centrul suprafeței frontale anterioare a pietrei și prezentînd o înclinație φ în raport cu axa acesteia.

Pentru reascuțirea și compensarea uzurii pietrei, aceasta se deplasează periodic după o direcție axială, efectuînd mișcarea de reglare *b*, pe direcția *B*, forma și dimensiunile hiperbolei de intersecție *5* a suprafeței *1* cu planul axial rămînînd constante.

Pentru realizarea unei suprafețe cilindro-hiperbolice *5*, piesa de rectificat, în cazul fig. 1 o freză detalonată cu profil rectiliniu *4*, se deplasează în raport cu piatra abrazivă *2*, după o direcție rectilinie B_1, perpendiculară pe planul axial al acesteia[2]).

În vederea măririi curburii hiperbolei *5*, generatoare a cilindrului hiperbolic după care se face rectificarea, se mărește excentricitatea c_1 a mișcării *B* a diamantului în raport cu axa pietrei, printr-o mișcare de reglare

---

[1]) Comunicată la Conferința republicană în domeniul proiectării și tehnologiei sculelor așchietoare, Brașov, noiembrie 1970.

[2]) Brevet R. S. R.

g, și se micșorează corespunzător excentricitatea c_2, printr-o mișcare de reglare h, ceea ce rezultă din analiza ecuației hiperbolei *5* [2],

$$\frac{R^2}{c_1^2} - \frac{x^2}{c_1^2 \operatorname{cotg}^2\varphi} - 1 = 0, \tag{1}$$

în care R este raza curentă a suprafeței *1*, x — abscisa axială a suprafeței *1*.

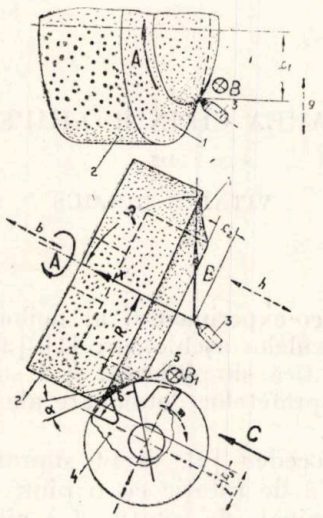


Fig. 1.

Într-adevăr, raza de curbură ρ va fi dată de

$$\rho = \frac{(R^2 + x^2 \operatorname{tg}^2\varphi)^{3/2}}{c_1^2}. \tag{2}$$

Din această relație rezultă că pentru mărirea curburii, respectiv pentru micșorarea razei de curbură curente ρ, se poate proceda la mărirea excentricității c_1, sau la micșorarea unghiului φ.

Experimental, s-a constatat că este mai comodă variația curburii prin modificarea excentricității c_1.

În cazul rectificării feței de așezare a unei scule aschietoare cu mai mulți dinți, de tipul frezelor profilate cu tăiș rectiliniu sau a tarozilor, pentru mărirea unghiului de așezare α se mărește excentricitatea c_3 dintre axa sculei și partea cilindrică exterioară a pietrei, printr-o mișcare de reglare *1*, și se mărește unghiul de poziție δ, dintre planul axial al sculei care trece prin vîrful dintelui ascuțit și axa pietrei, printr-o a doua mișcare de reglare m, de rotație a sculei ascuțite în jurul axei proprii.

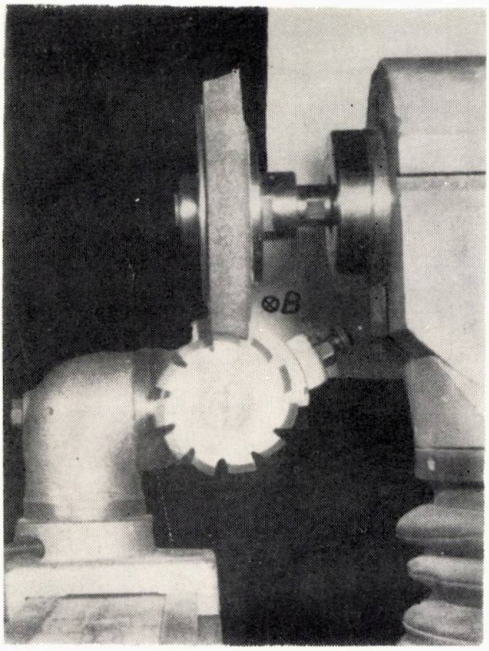


Fig. 2

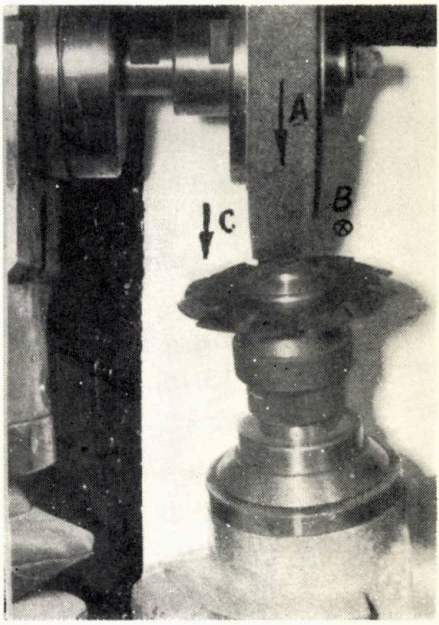


Fig. 3

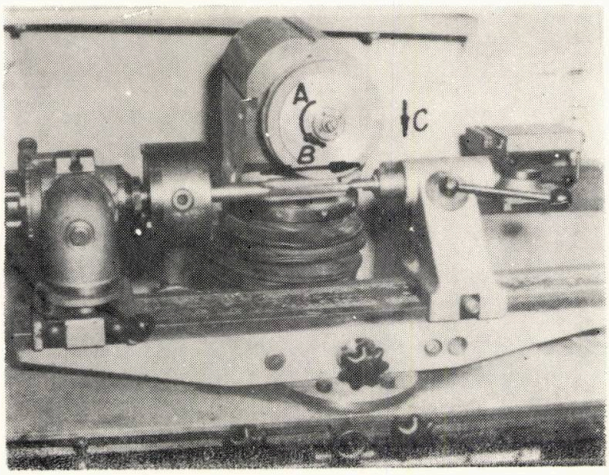


Fig. 4

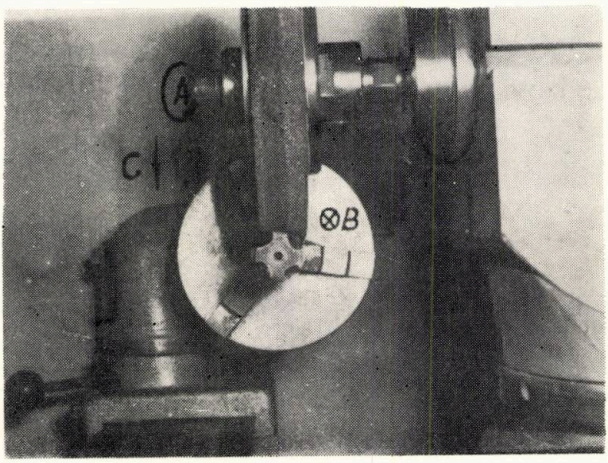


Fig. 5

Folosirea arcului de hiperbolă *5*, în locul arcului de cerc, prezintă o serie de avantaje, printre care, cele mai importante sînt :

a) suprafața hiperboloidală de rotație *1* se obține ușor pe mașinile universale de ascuțit scule, fără a se apela la dispozitive speciale de raionare, prin simpla fixare a diamantului pe masa mașinii ;

b) permite variația comodă, în limite largi a parametrilor hiperbolei de înlocuire *5*.

Experimentarea procedeului a confirmat avantajele enumerate.

În fig. 2 este prezentată rectificarea după un cilindru hiperbolic a feței de așezare principale, detalonate, a unei freze disc de filetat, aproximîndu-se arcul de spirală arhimedică printr-un arc de hiperbolă, iar în fig. 3, rectificarea feței de așezare secundare.

În fig. 4 și 5 s-a reprezentat rectificarea cilindro-hiperbolică a fețelor de așezare principale de pe partea aschietoare a tarozilor, procedeu deosebit de eficient, ca urmare a evitării unor utilaje complexe de rectificat-detalonat, iar pe de altă parte ca urmare a posibilității utilizării unor capete divizoare multiax cu productivitate mult sporită.

Primită la 10 septembrie 1972

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de mașini-unelte
și scule

BIBLIOGRAFIE

1. Белоус В., *Новый способ цилиндро-элиптическои заточки винтовых сверл.* Bul. Inst. polit. Iași, **XVI (XX)**, *3—4*, s. IV (1970).
2. Belous V., *Cercetări asupra ascuțirilor cilindro-eliptice și cilindro-hiperbolice a sculelor aschietoare (Studiul geometric al ascuțirii cilindro-eliptice duble).* Comunicările Conferinței din domeniul proceselor și utilajelor de prelucrare la rece, Inst. polit. Timișoara, secția Mecanică, pp. 59—67, 1971.

ЦИЛИНДРО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ ШЛИФОВАНИЕ

(Резюме)

Излагается новый способ шлифования цилиндро-гиперболических поверхностей употребляемый, в частности, при заточке режущего инструмента.

Новый способ характеризован фактом что активная поверхность круга имеет однополустную ротационно-гиперболическую форму, полученную прямолинейным наклонно-эксцентричаным движением алмаза в соотношении к оси круга.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 621.822.6; 621.9.01

STUDIUL DINAMICII ADÎNCIRII PROFILATE A ALAMELOR UTILIZATE ÎN CONSTRUCȚIA COLIVIILOR DE RULMENȚI [1])

DE

I. CONDREA, COSTACHE DRUȚU și GH. LUNGU

1. Introducere

În lucrare sînt prezentate rezultatele unor cercetări privind dinamica adîncirii profilate, cu aplicație la prelucrarea coliviilor de rulmenți care se construiesc din alamă Am 58, la „Fabrica de rulmenți" — Bîrlad.

Pentru calculul forței axiale și al momentului de așchiere, de obicei acest tip de adîncire se asimilează cu adîncirea standard, utilizînd relațiile de calcul respective.

Era de așteptat ca procesul de lucru cercetat să prezinte unele particularități datorită formei tăișului adîncitorului profilat (fig. 1). Întradevăr, variația adîncimii de așchiere atrage după sine și variația unghiului mediu de atac cu consecințele pe care le are această variație asupra componentelor forței de așchiere, în particular asupra componentelor P_x, a căror însumare dă forța axială de adîncire P_a.

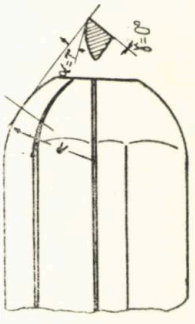


Fig. 1

Relațiile între componentele forței de așchiere și diverși alți parametri sînt de forma [1]:

$$(1) \qquad \begin{cases} P_x = \sigma_0 \xi^m st \sin \varkappa, \\ P_y = \sigma_0 \xi^m st \cos \varkappa, \\ P_z = \sigma_0 \xi^m st. \end{cases}$$

Din relațiile (1) rezultă influența directă a unghiului de atac mediu asupra componentelor P_x și P_y, cît și influența indirectă, prin intermediul

[1]) Prezentată la sesiunea științifică a Institutului politehnic din Iași, din 2—4 iulie 1970.

Tabelul 1

D	d	t	P_a kgf							M kgf cm						
			0,11	0,22	0,45	0,88				0,11	0,22	0,45	0,88			
9	5,5	1,75	55	—	191	340				32	—	43	106			
	6,5	1,25	26	68	93	140				15	30	47	72			
	7,5	0,75	8,5	21	30	38				13	17	21	34			
			0,11	0,22	0,45	0,88				0,11	0,22	0,45	0,88			
13	9	2	149	170	298	340				68	93	178	191			
	10,5	1,25	15	30	85	149				17	36	85	128			
				0,16	0,45	0,88	1,72				0,16	0,45	0,88	1,72		
26	18,3	3,85		51	85	149	268				106	234	425	720		
	20	3		42,5	51	85	318				85	182	318	446		
	22	2		21	23	38	106				64	119	204	383		
	24	1		8,5	15	13	21				34	64	106	156		
			0,11	0,16	0,22	0,45	0,62	0,88	1,72	0,11	0,16	0,22	0,45	0,62	0,88	1,72
34	23	5,5	254	—	296	448	721	—	—	213	—	360	594	765	—	—
	26	4	—	163	—	198	—	276	—	—	256	—	361	—	552	
	29	2,5	—	38	—	42,5	—	85	177	—	127	—	234	—	403	639
	31	1,5	—	25	—	30	—	38	64	—	93,5	—	161	—	237	448
			0,11	0,16	0,22	0,45	—	0,88	1,72	0,16	0,11	0,22	0,45	—	0,88	1,72
38	26	6	—	149	213	530	—	—	—	—	319	360	850		1272	—
	30	4	51	—	93	127	—	276	—	166	—	276	445		850	—
	34	2	—	34	—	42	—	51	85	—	148	—	318		469	809
	36	1	—	13	—	15	—	21	38	—	85	—	148		233	446
			0,11	0,16	0,32	0,45		0,88	1,72	0,11	0,16	0,32	0,45		0,88	1,72
45	34	5,5	64	127	157	255		639	—	213	297	552	765		1360	—
	38	3,5	—	93	—	106		156	402	—	233		425		722	101
	40,5	2,25	—	30	—	64		106	252	—	127	—	318		510	850

coeficientului de comprimare plastică [1]. Influența directă fiind preponderentă, este de așteptat o creștere a componentei P_x odată cu creșterea unghiului mediu de atac.

Unul din obiectivele experiențelor l-a constituit determinarea gradului de influență a adîncimii de așchiere atît prin creșterea secțiunii așchiei, cît și prin modificarea unghiului mediu de atac care o însoțește.

Pe baza bibliografiei consultate [2] s-a considerat că relațiiie de calcul care țin seama simultan de adîncimea de așchiere (cu particularitățile prezentate), de avans și de diametru, trebuie să fie de forma :

$$(2) \qquad \begin{cases} P_a = C_p s^{x_p} t^{y_p} d^{u_p}, \\ M = C_m s^{x_m} t^{y_m} d^{u_m}. \end{cases}$$

2. Prezentarea experiențelor și a rezultatelor

Cercetările au fost efectuate cu alama furnizată de „Fabrica de rulmenți" — Bîrlad, folosind un dispozitiv dinamometric de tip Paramonov, care măsoară independent și simultan momentul și forța axială. Etalonarea dispozitivului dinamometric a permis stabilirea sensibilității de determinare a momentului, egală cu 4,25 kgf cm/div și a forței axiale, de 4,22 kgf/div, utilizînd un comparator de miime [2].

S-au făcut experimentări cu adîncitoare profilate cu diametrele nominale D : 9 ; 13 ; 26 ; 34 ; 38 și 45 mm, avînd respectiv razele profilului axial R : 4,75 ; 6,5 ; 9,5 ; 13,5 ; 17 ; 21 ; 30 mm, unghiul de degajare $\gamma = 0°$, și unghiul de așezare, $\alpha = 7°$.

Au fost determinate valorile forței axiale și ale momentului de așchiere, variind succesiv avansul și adîncimea, pentru fiecare sculă în parte (fiecare diametru de sculă). Au rezultat datele din tabelul 1, date care au fost reprezentate în coordonate dublu logaritmice în fig. 2...8.

Pe baza datelor experimentale și prin interpolare a fost trasat, de asemenea în coordonate dublu logaritmice, graficul $M = f(d)$, iar în coordonate proporționale, graficul $F_a = f(d)$.

Rezultatele determinării, pe cale grafică și analitică, a valorilor medii ale exponenților și constantelor forței și momentului sînt date în tabelul 2. Valoarea lui $y_p = 1{,}8$ confirmă ipoteza făcută mai sus privitoare la influența cumulată a creșterii grosimii așchiei și a creșterii unghiului mediu de atac.

Tabelul 2

x_m	y_m	u_m	x_p	y_p	u_p	C_m	C_p
0,74	0,96	0,95	0,73	1,8	0	65	30

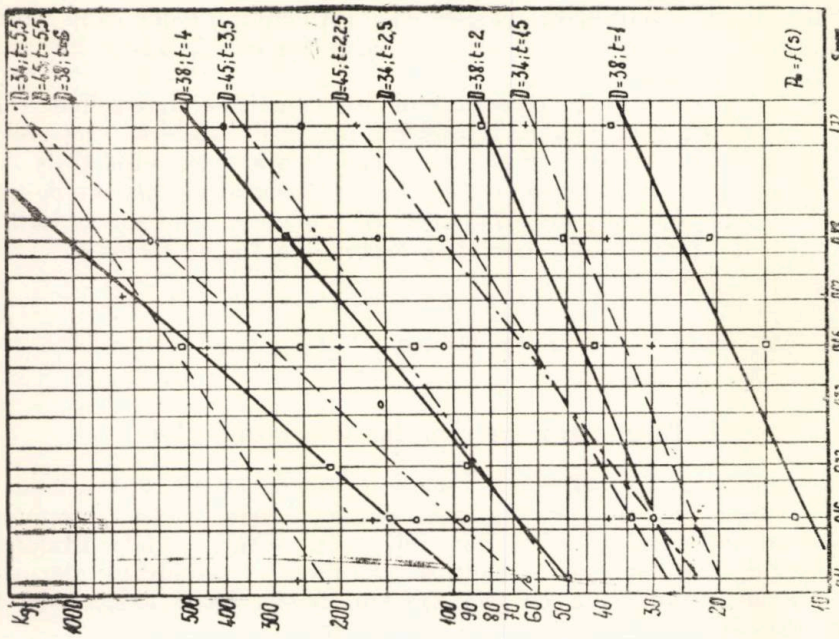

D=34; t=5,5
D=45; t=5,5
D=38; t=6
D=38; t=4
D=45; t=3,5
D=45; t=2,25
D=34; t=2,5
D=38; t=2
D=34; t=1,5
D=38; t=1
Pa=f(s)
Kgf
Smm

Fig. 3

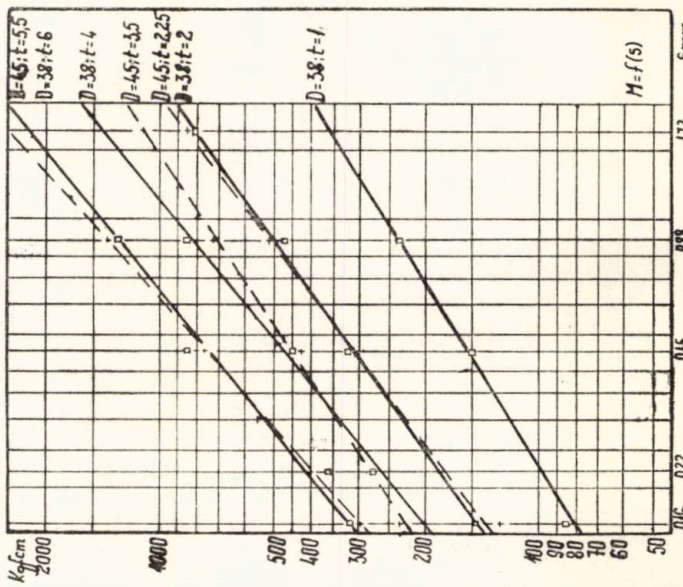

D=45; t=5,5
D=38; t=6
D=38; t=4
D=45; t=3,5
D=45; t=2,25
D=38; t=2
D=38; t=1
M=f(s)
Kgf/cm
Smm

Fig. 2

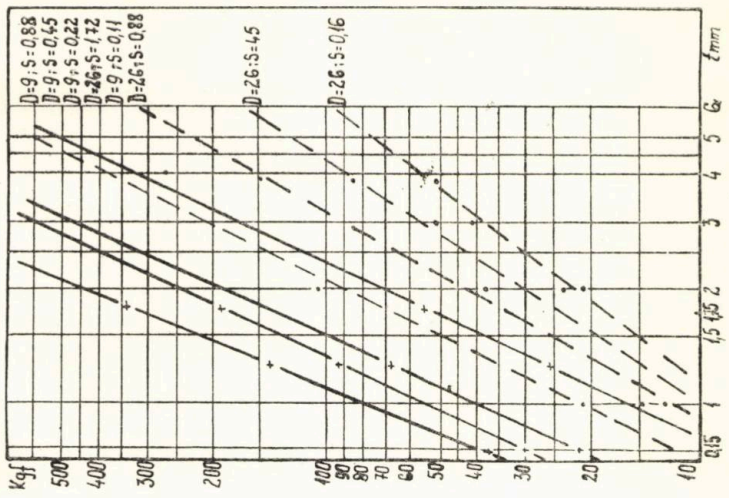

D=9; S=0,88
D=9; S=0,45
D=9; S=0,22
D=26; S=1,72
D=9; S=0,11
D=26; S=0,88
D=26; S=45
D=26; S=0,16
Kgf
500
400
300
200
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0,15
1
1,5
1,75
2
3
4
5
6
tmm

Fig. 5

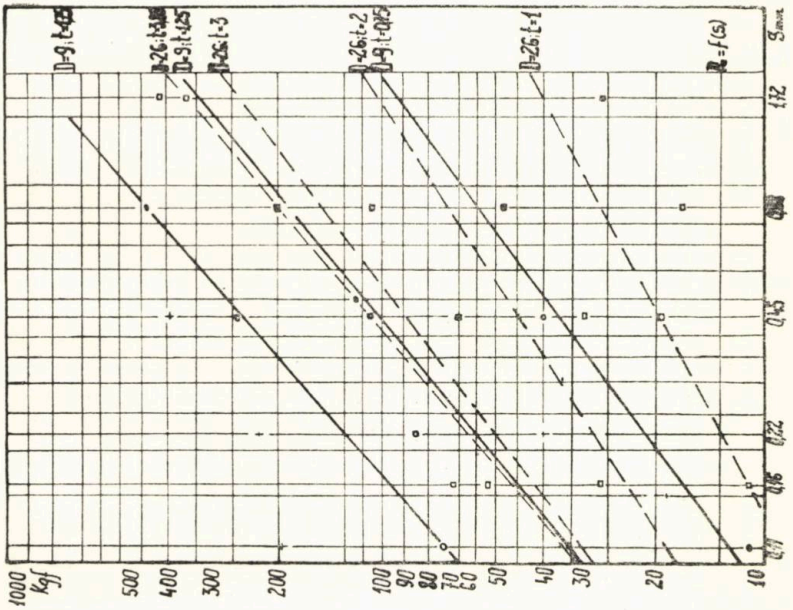

D=26; t=3
D=26; t=2
D=26; t=1
R=f(S)
1000
Kgf
500
400
300
200
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0,22
0,45
1,72

Fig. 4

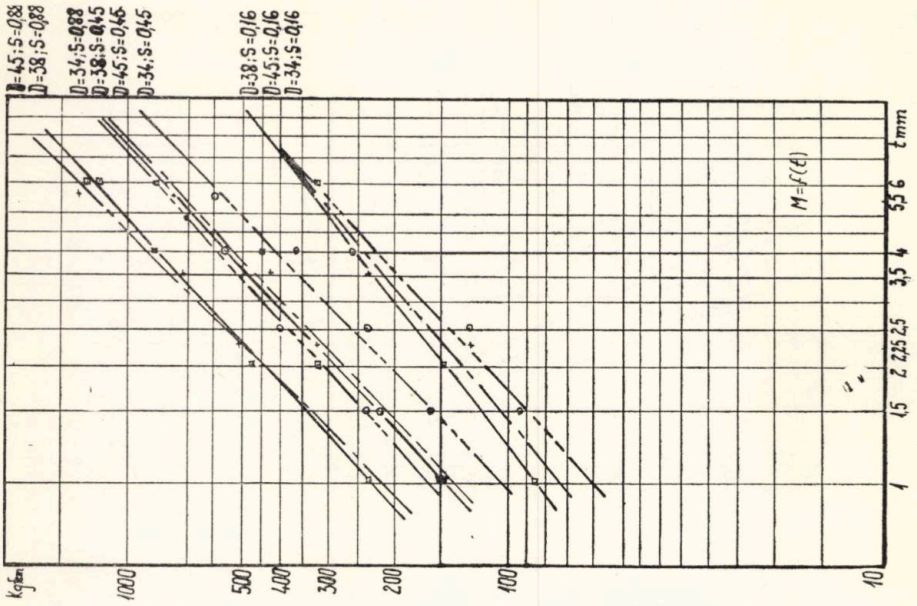

D=45;S=0,88
D=38;S=0,88
D=34;S=0,88
D=38;S=0,45
D=45;S=0,45
D=34;S=0,45
D=38;S=0,16
D=45;S=0,16
D=34;S=0,16
Kgf
1000
500
400
300
200
100
10
1
1,5
2
2,25
2,5
3,5
4
5,5
6
t mm
M=f(t)

Fig. 7

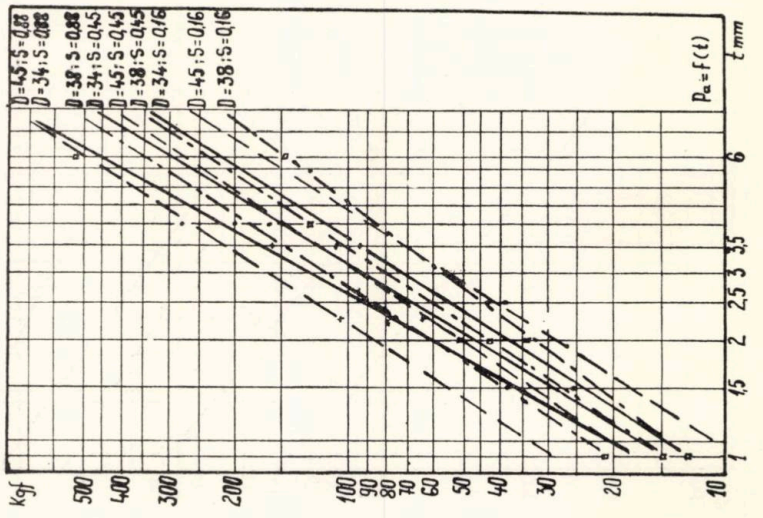

D=45;S=0,88
D=34;S=0,88
D=38;S=0,45
D=34;S=0,45
D=45;S=0,45
D=38;S=0,16
D=34;S=0,16
D=45;S=0,16
D=38;S=0,16
Kgf
500
400
300
200
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
1
1,5
2
2,5
3
3,5
6
t mm
Pa=F(t)

Fig. 6

O altă observație se referă la influența diametrului asupra forței axiale. În literatura de specialitate [3], relațiile de calcul indică o creștere a forței cu diametrul, ceea ce nu are o justificare în teoria așchierii. Era de așteptat o reducere a acestei forțe odată cu creșterea diametrului datorită îmbunătățirii condițiilor de așchiere, a reducerii relative a forței de frecare. Acest fapt a fost confirmat de experiențele noastre, așa cum rezultă din fig. 9, unde este reprezentată funcția $F_a = f(d)$.

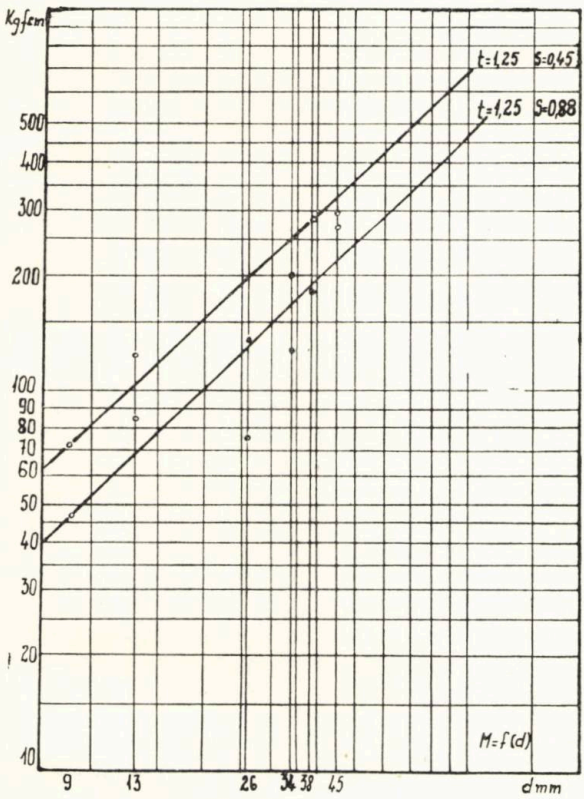


Fig. 8

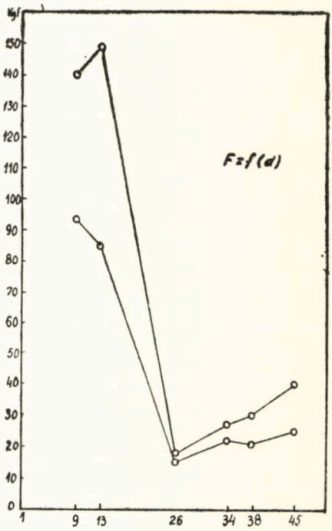


Fig. 9

Un alt obiectiv l-a constituit influența vitezei de așchiere asupra forțelor și momentelor. Rezultatele sînt prezentate în tabelul 3, din care reiese, după cum era de așteptat, o influență neglijabilă.

Un rezultat secundar al experiențelor l-a constituit constatarea distorsionării nedorite a legii de variație a forței axiale cu avansul datorită

Tabelul 3

D	26								
t	3								
s	0,16						0,45		
n	31,5	63	125	250	500	1 000	31,5	125	500
P_a	10	10	10	10	10	7	22	24	25
M	22	23	22	21	20	12	45	40	40

unei tehnologii de ascuţire incorecte, care a avut drept rezultat o faţetă cu un unghi de aşezare nul, neuniformă şi de mărime nejustificat de mari (scula cu diametrul de 13 mm).

3. Concluzii

1. Interesul pentru aceste experimentări a fost determinat de utilitatea unor relaţii care să permită calculul cu precizie al forţei axiale P_a şi a momentului M care apar la adîncirea profilată a alamelor, fapt ce poate furniza date utile pentru încărcarea judicioasă a maşinilor-unelte pentru prelucrarea coliviilor de alamă, cît şi date iniţiale de proiectare a dispozitivelor şi modernizărilor care se aduc acestei operaţii cu mare consum de muncă, materiale şi utilaje într-o fabrică de rulmenţi.

2. Lucrarea prezintă un interes imediat pentru „Fabrica de rulmenţi“ — Bîrlad, cu care s-a încheiat, de altfel, o convenţie de colaborare, cît şi un interes general, atrăgînd atenţia asupra limitelor pe care le prezintă folosirea într-un domeniu a unor relaţii valabile în alt domeniu de prelucrare prin aşchiere.

Primită la 24 ianuarie 1972

Institutul politehnic, Iaşi
Catedra de maşini-unelte şi scule

BIBLIOGRAFIE

1. Belous V., *Proiectarea sculelor.* Rotaprint, Inst. polit. Iaşi, 1968.
2. Caşler Gh., Belous V., Rener Al., *Contribuţii la cercetarea experimentală a dinamicii burghierii oţelurilor româneşti.* Construcţia de maşini, *6 — 7*, 375 (1968).
3. Зорев Н. Н. *Вопросы механики процесса резания металлов.* Машгиз, М., 1956.

ÉTUDE DE LA DYNAMIQUE DE L'APPROFONDISSEMENT PROFILÉ DES LAITONS UTILISÉS DANS LA CONSTRUCTION DES CAGES DE ROULEMENTS

(Résumé)

On présente les résultats des recherches concernant la dynamique de l'approfondissement profilée, avec application dans l'usinage des cages de roulements qu'on construit en laiton Am 28, à la „Fabrique des roulements" – Bîrlad. On a déterminé les exposants et les coefficients de la relation de la force et du moment, ainsi que le degré d'influence de la profondeur de coupe sur les forces et sur le moment de torsion.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secția IV
MECANICĂ TEHNICĂ

C. Z. 611.9.01

DETERMINAREA PARAMETRILOR FORȚEI PRINCIPALE DE AȘCHIERE ÎN PROCESUL DE STRUNJIRE LONGITUDINALĂ LA OȚELURILE ROMÂNEȘTI

NOTA VII[1])
GRUPA DE OȚEL ALIAT PENTRU SCULE STAS 3611—61

DE

AUREL RĂILEANU și DAN NICOLESCU

În această lucrare se dau rezultatele experiențelor întreprinse de autori pentru determinarea valorilor exponenților x_P, y_P și a constantei C_P la strunjirea longitudinală a oțelurilor românești RW 180, W 85, W 23-W 15, W 14, C 120, N 15, și NO 6, furnizate de Uzinele „23 August" — București.

Experiențele s-au efectuat pe un strung românesc S 3A, folosindu-se cuțite din oțel rapid R 18 cu următoarea geometrie : $\alpha = 10°$, $\gamma = 25°$, $\lambda = 0°$, $\varkappa = 45°$ și $\varkappa' = 15°$, fără a se utiliza lichide de ungere și răcire.

În procesul de așchiere cuțitul s-a montat pe un dinamometru tip G. A. Levit, prevăzut cu amortizor hidraulic și cu pîrghia de transmitere a deformațiilor legată rigid de amortizor [1], [2].

Pentru determinarea valorilor numerice ale exponenților x_P, y_P și a constantei C_P din relația :

$$P_z = C_P t^{y_P} D^{y_P}, \tag{1}$$

s-au executat experiențe la diferite valori ale adîncimii de tăiere t și avansului s, cu trei viteze de tăiere menținute aproximativ constante. Pentru aceleași valori ale variabilelor t și s, la cele trei viteze de tăiere, s-au calculat valorile medii, care introduse în relația de etalonare

---

[1]) Prezentată la sesiunea științifică a Institutului politehnic din Iași, din 5—7 februarie 1965.

(2) $$P_z = \frac{240}{30+l} d \quad [\text{kgf}],$$

au dat valorile pentru forţa P_z.

În relaţia (2), 240 reprezintă constanta dinamometrului, 30 este lungimea cuţitului în suportul dinamometrului pînă la axa barei de torsiune, măsurată în mm, l—lungimea în consolă a cuţitului, iar d — indicaţia în număr de diviziuni a comparatorului cu cadran cu precizia de 0,01 mm, montat la dinamometru.

S-au trasat apoi prin puncte, în coordonate dublu logaritmice (fig. 1...8), grupele de curbe aproximate cu drepte pentru $t = \text{const.}$ şi $s = \text{const.}$, după care, luîndu-se pe fiecare dreaptă cîte două puncte, s-au calculat valorile exponenţilor x_P şi y_P cu ajutorul relaţiilor :

(3) $$x_P = \frac{\log (P_{z2}/P_{z1})}{\log (t_2/t_1)},$$ (4) $$y_P = \frac{\log (P'_{z2}/P'_{z1})}{\log (s_2/s_1)}.$$

Aceste relaţii s-au obţinut prin scădere, după logaritmarea expresiei (1), în care s-au introdus valorile corespunzătoare pentru forţa principală de tăiere P_z.

Tabelul 1

Oţel STAS nr. 3611-61	H_B kgf/mm²	x_{Pm}	y_{Pm}	C_{Pm}
RK 100	—	—	—	—
RK 50	—	—	—	—
RW 180	236	0,93	0,72	250,80
RW 90	—	—	—	—
RMo 50	—	—	—	—
W 85	201	0,92	0,71	271,35
W 50	—	—	—	—
W 45	—	—	—	—
W 23	217	0,94	0,76	251,90
W 15	262	0,93	0,80	260,70
W 14	262	0,99	0,77	269,15
C 120	223	0,84	0,66	244,05
C 15	—	—	—	—
N 15	235	0,92	0,82	252,65
N 06	207	0,95	0,76	230,70
M 18	—	—	—	—
M 14	—	—	—	—

Pe baza valorilor x_P şi y_P, corespunzătoare numărului de drepte din fiecare diagramă, s-au determinat valorile medii x_{Pm} şi y_{Pm} ale exponenţilor, date în tabelul 1.

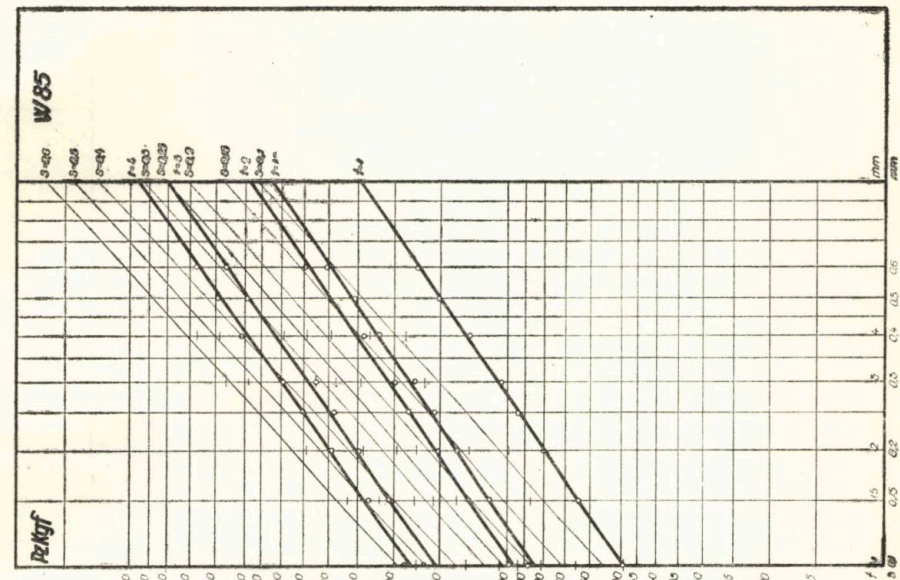


Fig. 2

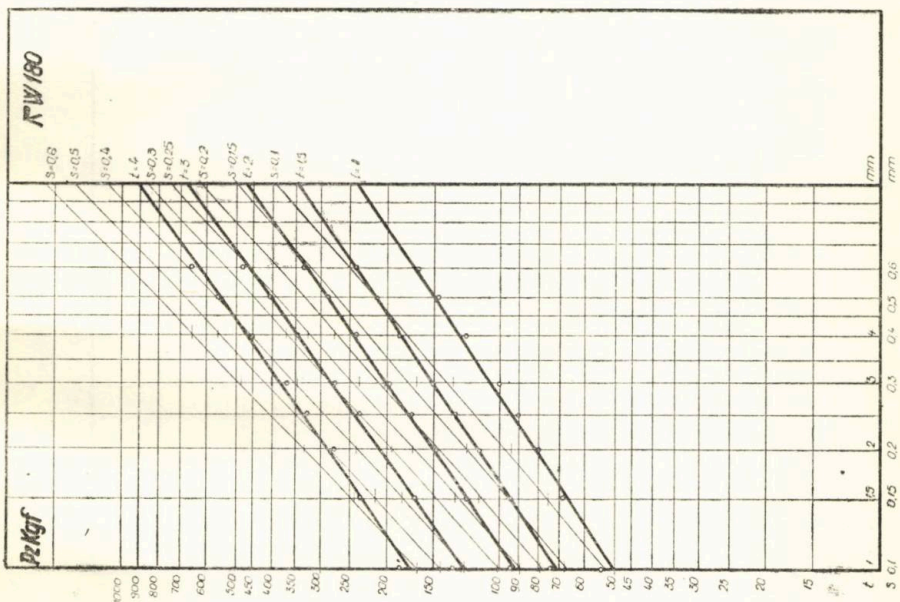


Fig. 1

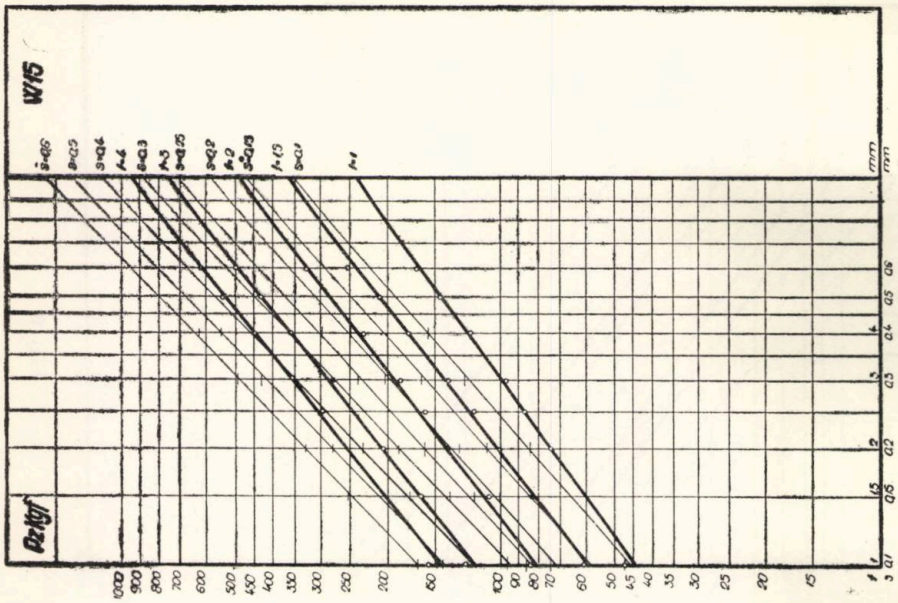


Fig. 4

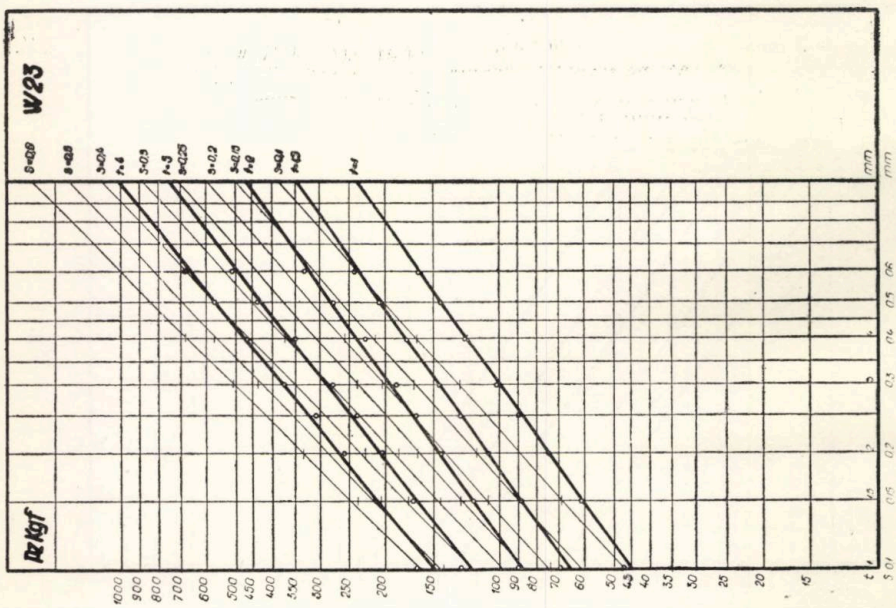


Fig. 3

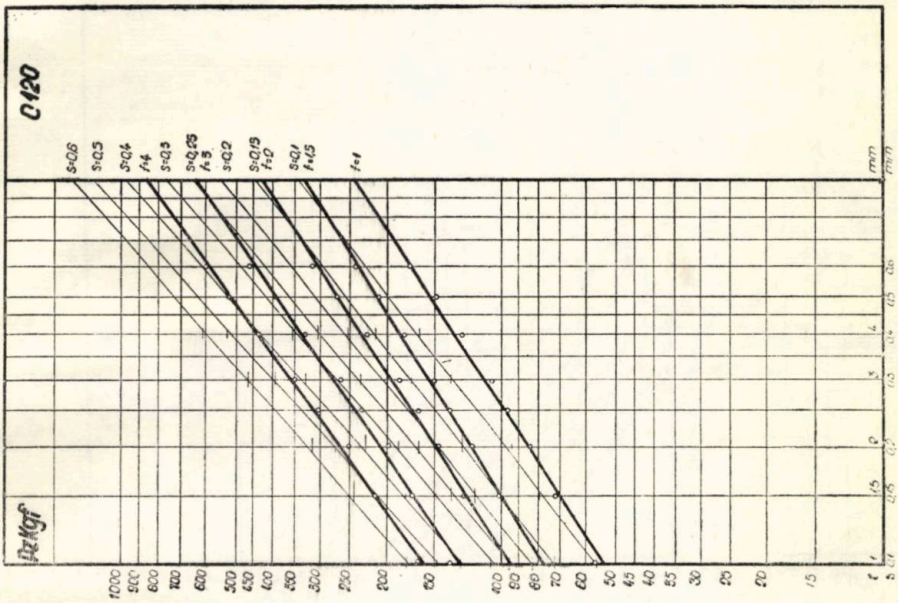

C120
S-0,8
S-0,5
S-0,4
f-4
S-0,3
S-0,25
f-3,5
S-0,2
S-0,15
f-2,5
S-0,1
f-1,5
f-1
PzKgf
mm

Fig. 6

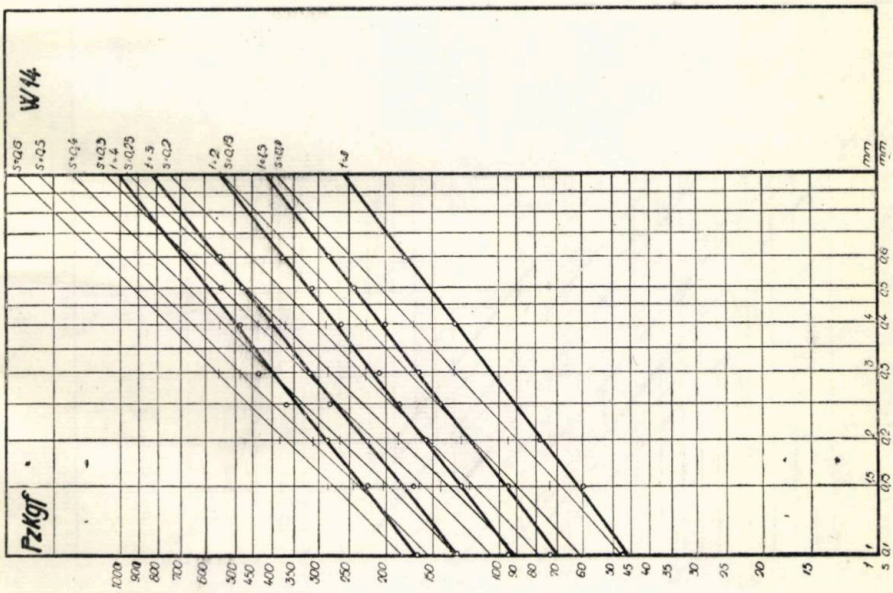

W14
S-0,8
S-0,5
S-0,4
S-0,3
f-4
S-0,25
f-3
S-0,2
f-2
S-0,15
f-1,5
S-0,1
f-1
PzKgf
mm

Fig. 5

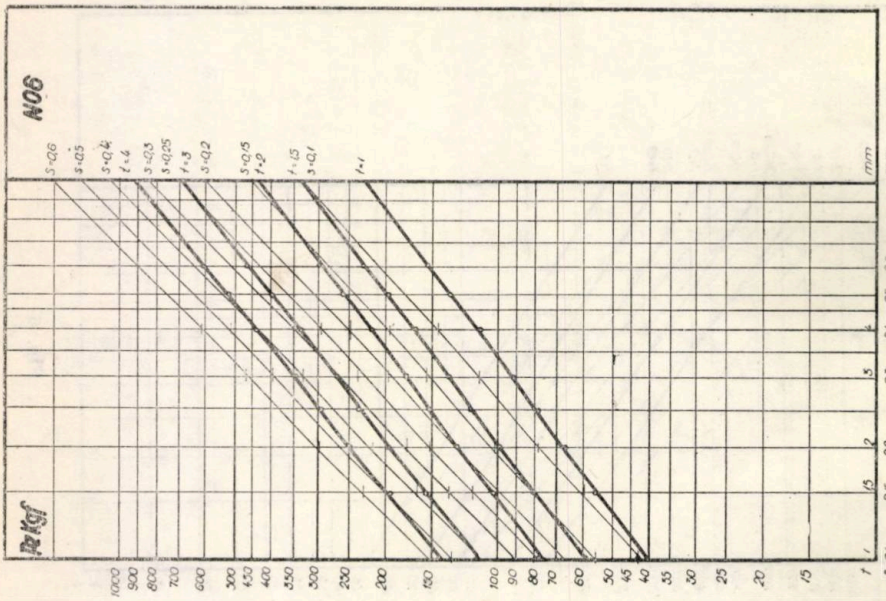

N06
Pe Kgf
S=0,6
S=0,5
S=0,4
1:4
S=0,3
S=0,25
1:3
S=0,2
S=0,15
1:2
S=0,1
1:1
mm

Fig. 8

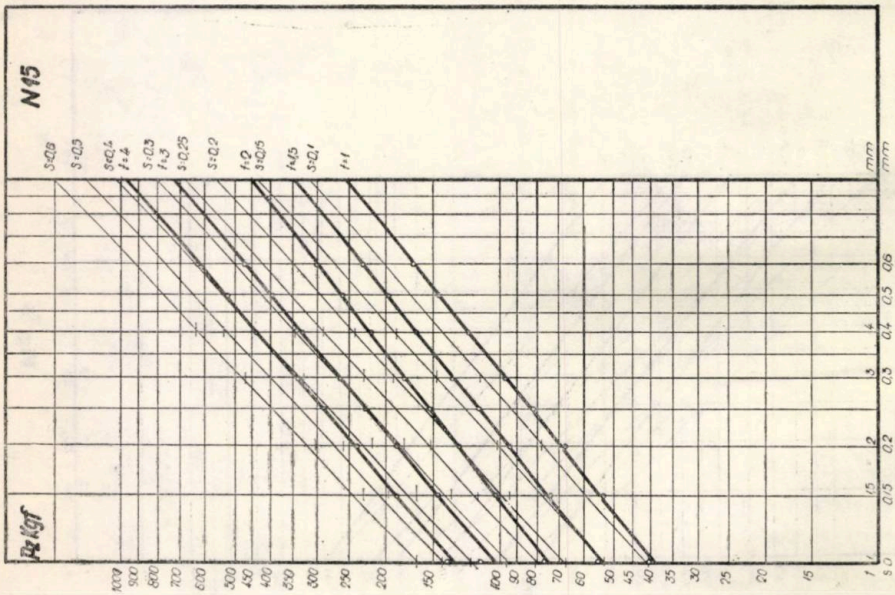

N15
Pe Kgf
S=0,8
S=0,6
S=0,4
1:4
S=0,3
1:3
S=0,25
S=0,2
1:2
S=0,15
S=0,1
1:1
mm

Fig. 7

Constanta C_P s-a calculat cu relația:

$$C_P = \frac{P_z}{t^{x_{Pm}} s^{y_{Pm}}}, \tag{5}$$

introducîndu-se succesiv valorile forței principale de tăiere pentru $s = 1$ și apoi pentru $t = 1$. În continuare, făcîndu-se media acestor valori, s-a obținut pentru fiecare material o valoare medie C_{Pm}, dată de asemenea în tabelul 1.

Primită la 1 octombrie 1971

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de mașini-unelte și scule

BIBLIOGRAFIE

1. Caşler Gh. ş. a., Bul. Inst. polit. Iaşi, II (VI), *3—4*, 313 (1956).
2. Caşler Gh. ş. a., Bul. Inst. polit. Iaşi, IV (VIII), *1—2*, 377 (1958).
3. Bauşic V. ş. a., Bul. Inst. polit. Iaşi, IV (VIII), *1—2*, 379 (1958).

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DES FORCES DE COUPE CONCERNANT LES ACIERS ROUMAINS, SOUMIS AU TOURNAGE LONGITUDINAL

Note VII

Les aciers standardisés STAS 3 611—61

(Résumé)

En utilisant le dynamomètre du type G. A. Levit pour la détermination des paramètres x_p, y_p et C_p, nécessaires au calcul de la force principale de coupe, donnée par l'éxpression (1), les auteurs établissent les valeurs de ces paramètres-ci pour les sortes suivantes d'acier: RW 180, W 85, W 23, W 15, W 14, C 120, N 15 et NO 6, STAS 3 611—61.

Les résultats obtenus par voie expérimentale sont représentés sur un diagramme l'échelle doublement logarithmique, par les fonctions $P_z = f_1(s)$ et $P_z = f_2(t)$. À l'aide d'un tel diagramme on peut facilement déterminer, d'une part, les valeurs des paramètres, et d'autre part, leur influence sur les processus de coupe.

Nr. colilor de tipar 14,25 + planșe

Întreprinderea poligrafică Iași
str. V. Alecsandri nr. 6
Comanda nr. 310
Republica Socialistă România

40822